Université de Sherbrooke **hiver 2018**
Claudius Zibrowius 09/01/2018

Topologie algébrique
Devoirs 1

---

1 | Bricolage I

(a) Soit $X = A \cup B$ un recouvrement d'un espace X par deux sous-espaces fermés. Soient $f\colon A \to Y$ et $g\colon B \to Y$ deux applications continues et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$. Alors l'application $h\colon X \to Y$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

est continue. Est-ce que c'est vrai si A et B sont ouverts ? Ou si A et B sont arbitraires ?

(b) Est-ce qu'il y a des applications $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ telles que f et $g \circ f$ sont continues, mais pas g ? Telles que g et $g \circ f$ sont continues, mais pas f ?

2 | Sphères exotiques

Soient $h\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ un homéomorphisme et $\Sigma^n(h)$ le pushout de la diagramme

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"] & D^n \arrow[dd] \\ S^{n-1} \arrow[d, hook] & \\ D^n \arrow[r] & \Sigma^n(h) \end{tikzcd}$$

Montrez que $\Sigma^n(h)$ est homéomorphe à S^n. (À propos, Milnor a prouvé en 1959 qu'il y a des difféomorphismes h tels que $\Sigma^n(h)$ n'est pas *difféomorphe* à S^n ; dans ce cas, $\Sigma^n(h)$ est appelée **sphère exotique**.)

3 | Globalisation

On appelle un espace X **localement connexe par arcs** si pour chaque $x \in X$ et chaque voisinage $U \ni x$, il y a un voisinage $V \subseteq U$ de x qui est connexe par arcs.

(a) Prouvez qu'un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs aussi.

(b) Trouvez un espace qui est connexe par arcs, mais pas *localement* connexe par arcs.

4 | Interpolation

(a) Soit $a\colon S^n \to S^n$ l'**application antipodale** définie par $a(x) = -x$. Montre que a est homotope à l'identité si n est impair.

(b) Soit $f\colon S^1 \to S^1$ une application qui n'est pas homotope à l'identité. Montrez qu'il y a un point $x \in S^1$ tel que $f(x) = -x$ et un point $y \in S^1$ tel que $f(y) = y$. Qu'est-ce qui se passe si on remplace S^1 par S^n ?

5 | Une ligne compacte

Soit X un espace qui se rétracte fortement par déformation à un point $x_0 \in X$. Prouvez: Pour tous les voisinages ouverts U de x, il y a un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de x_0 de façon que l'inclusion $(V, x_0) \hookrightarrow (U, x_0)$ est homotope rel x_0 à l'application constante. Qu'est-ce qui se passe si x_0 est juste un rétracte par déformation de X (pas «fort») ?

6 | Double crème glacée

(a) Un **cône** $C(X)$ d'un espace X est defini par

$$C(X) := X \times [0,1]/X \times \{1\}.$$

Montrez que $C(X)$ est contractile.

(b) Une **suspension** $S(X)$ d'un espace X est obtenue en collant deux cônes ensemble le long $X \times \{0\}$, alors

$$S(X) := X \times [-1,1] \,/ \{\forall x, x' \in X : (x,1) \sim (x',1) \text{ et } (x,-1) \sim (x',-1)\}\,.$$

Montrez que $S(X)$ est simplement connexe si X est connexe par arcs.

★ Inéquations pour égalité !

(a) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, soient

$$||x||_1 = |x_1| + |x_2|, \quad ||x||_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad ||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

les normes qui induisent des métriques d_1, d_2 et d_∞ par $d_?(x,y) = ||x-y||_?$. Montrez que les topologies induites en $\mathbb{R}^2$ sont égales.

(b) Soit d une métrique d'un espace X. Montrez que

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

définit une autre métrique sur X qui induit la même topologie que d.

Université de Sherbrooke **hiver 2018**
Claudius Zibrowius 23/01/2018

Topologie algébrique
Devoirs 2

---

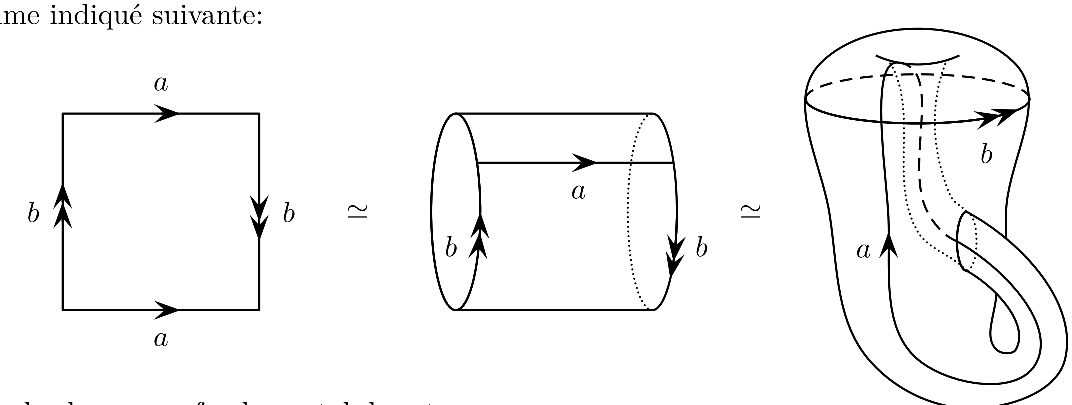
7 | Boîte aux lettres

Montrez que
$$D^n \times \{0\} \cup \partial D^n \times I \subset D^n \times I$$
est un rétracte fort par déformation de $D^n \times I$, où $\partial D^n = S^{n-1}$ est la frontière de D^n. Déduisez la proposition suivante: Si deux applications $f, g : S^{n-1} \to X$ sont homotopes, $X \cup_f D^n \simeq X \cup_g D^n$.

[Indice: Trouvez un espace Y tel que $X \cup_f D^n \simeq Y \simeq X \cup_g D^n$.]

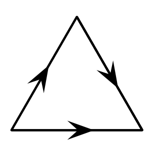
8 | Bricolage II

(a) La bouteille de Klein [prononcé: kla.ɪn] est obtenu en identifiant les bords d'un carré ensemble comme indiqué suivante:



Calculez le groupe fondamental de cet espace.

(b) Prenez un triangle solide est collez les bords ensemble comme indiqué:



Montrez que cet espace est contractile.

9 | Möbius

(a) Construisez un espace contenant à la fois un anneau et une bande de Möbius comme rétractes forts par déformation.

(b) Prouvez qu'il n'y a pas une rétraction de la bande de Möbius à sa frontière.

(c) Prenez un bandeau et le couper verticalement, tournez l'un des deux bords de coupe de 360 degrés autour de l'axe longitudinal et recousez les deux bords de coupe ensemble. Est-ce que le nouveau bandeau homéomorphe à l'original ?

10 | Produits sont produits

Soient X et Y deux espaces et $x \in X$ et $y \in Y$ deux points de référence. Prouvez que les projections induisent un isomorphisme

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Donc, calculez le groupe fondamental d'un tore. Est-ce que la bouteille de Klein (de l'exercice 8) homotopiquement équivalente au tore ?

11 | Le théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème fondamental de l'algèbre dit:

> *Un polynôme, à coefficients complexes, qui n'admet aucune racine complexe, est constant.*

Prouvez ce théorème en utilisant des méthodes topologiques comme suit: Soit f un polynôme du degré n, considéré comme une application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supposez que f n'ait aucune racine. Donc on peut définir une application $g : S^1 \to S^1$ par

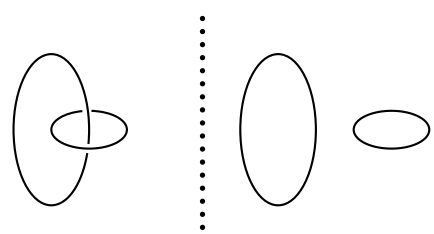
$$z \mapsto g(z) := \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Calculez $[g] \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ de deux façons pour montrer que $0 = [g] = n$.

[Indice: Utilisez la même idée qu'on a déjà exploité en exercise 5.]

12 | Hopf

Considérez les deux configurations suivantes des paires des cercles dans S^3. (Je les ai dessinées dans $\mathbb{R}^3$; ajoutez un point à l'infinité.)



Calculez les groupes fondamentaux des compléments de ces cercles et déduisez qu'il n'y a pas un homéomorphisme de S^3 à lui-même qui envoie une configuration à l'autre.

★ Pendere, pendo, pependi, pensum

Il faut accrocher un portrait d'Elisabeth II à un mur où il y a déjà trois clous. Pour ça, on attache une corde aux deux coins du cadre. Comment est-ce qu'on peut enrouler la corde autour les clous de manière à ce que le portrait est accroché au mur, mais il va tomber sur le sol, si on enlève l'un des clous, peu importe lequel.

Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius

hiver 2018
22/02/2018

Topologie algébrique
Devoirs 3

---

13 | Bricolage III

Considérez $X = S^1 \vee S^1$ avec le point wedge x_0 comme point base. Alors, $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b \rangle$, où a et b sont les deux lacets qui enroulent autour un des deux cercles, respectivement. Décrivez les revêtements associés à

(a) $\langle\langle a \rangle\rangle$, le sous-groupe normal engendré par a,

(b) $\langle a \rangle$, le sous-groupe engendré par a,

(c) le noyau de l'homomorphisme $\varphi\colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{Z}/4$ défini par $\varphi(a) = [1]$ et $\varphi(b) = [3]$.

14 | Bricolage IV

Considérez le complexe cellulaire Y à deux dimensions obtenu de X de l'exercice 13 en attachant deux 2-cellules le long deux lacets des classes d'homotopie a^2 et b^2. Puis

$$\pi_1(Y, x_0) = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle.$$

(a) Construisez le revêtement de Y associé à $\langle a | a^2 \rangle$.

(b) Construisez le revêtement de Y associé au noyau de l'homomorphisme

$$\varphi\colon \langle a, b | a^2, b^2 \rangle \to \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto 1, \quad b \mapsto 0.$$

Déduisez que $\ker(\varphi)$ est isomorphe à $\langle a, b | a^2, b^2 \rangle$.

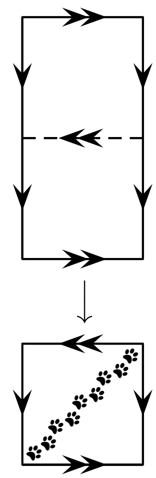
15 | Liberté est héréditaire !

Un graphe G est un complexe cellulaire à une dimension avec un potentiellement infini nombre de 0-cellules et 1-cellules. Un sous-graphe est un sous-complexe d'un graphe. Un arbre est un graphe qui est contractile. Un arbre T qui est un sous-graphe d'un graphe G est appelé maximal si T est le seul sous-graphe de G qui contient T.

(a) Si $T \subseteq G$ est un arbre, montrez que l'application de quotient $G \to G/T$ est une équivalence homotopique et G/T est un graphe aussi. *[Indice: exercice 7 peut être utile.]* Déduisez que tout graphe connexe est homotopiquement équivalent à un graphe avec une seule 0-cellule.

(b) Montrez que le groupe fondamental d'un graphe avec un seul 0-cellule est le groupe libre avec un générateur pour chaque 1-cellule. Déduisez que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

16 | Tore 2:1 Klein



Dans l'image à droite, j'ai dessiné un revêtement double d'une bouteille de Klein (exercice 8) par un tore. Précisez l'application du revêtement et calculez l'homomorphisme induit entre les groupes fondamentaux.

Sur la bouteille de Klein, un animal a laissé ses empreintes. Précisez quelle chemin cet animal a pris et trouvez tous les relèvements de ce chemin. Dessinez les relèvements dans la représentation usuelle du tore comme sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

17 | Les automorphismes du tore

Le foncteur π_1 induit une application

$$\begin{aligned} \varphi\colon \ \mathrm{Aut}(T^2,0) &\to GL_2(\mathbb{Z}) \\ [f\colon \ (T^2,0)\to(T^2,0)] &\mapsto (f_*\colon \ \pi_1(T^2,0)\to\pi_1(T^2,0)), \end{aligned}$$

où $\mathrm{Aut}(T^2,0)$ est le groupe des automorphismes pointés du tore pointé $(T^2,0)$ à homotopie près. Montrez que φ est un isomorphisme de groupes bien défini. *[Indice: $GL_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$.]*

18 | Transformations de Deck

Soit X un espace Hausdorff et G un groupe agissant sur X par homéomorphismes **librement** (c-à-d si $g.x = x$ pour $x \in X$ et $g \in G$, alors $g = e$) et **proprement discontinûment** (c-à-d $\forall x \in X$, il y a un voisinage ouvert $U \ni x$ tel que $\{g \in G | g(U) \cap U \neq \emptyset\}$ est fini).

(a) Montrez que l'application de quotient $p\colon \ X \to X/G$ définit un revêtement.

(b) Déduisez que si X est simplement connexe et connexe par arcs, pour tout point $[x] \in X/G$, il y a un isomorphisme de groupes $\pi_1(X/G,[x]) \simeq G$.

(c) Finalement, montrez que pour $n \geqslant 2$ impair et chaque $m \geqslant 2$, il y a un espace X dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/m$ et dont le revêtement universel est S^n.

★ Seifert-van-Kampen pour recouvrements fermés ?

Soit X un espace topologique qui est recouvert par deux sous-espaces fermés A et B. Par l'exercice 1 (de la première feuille),

$$\begin{tikzcd} A\cap B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est une diagramme de pushout. Pour tout $x_0 \in A \cap B$, elle induit la diagramme commutative suivante:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A,x_0) \arrow[d] \\ \pi_1(B,x_0) \arrow[r] & \pi_1(X,x_0) \end{tikzcd}$$

Supposez que $A \cap B$ est connexe par arcs. Est $\pi_1(X,x_0)$ le pushout de la deuxième diagramme ?

Université de Sherbrooke **hiver 2018**
Claudius Zibrowius 01/03/2018

Topologie algébrique
Devoirs 4

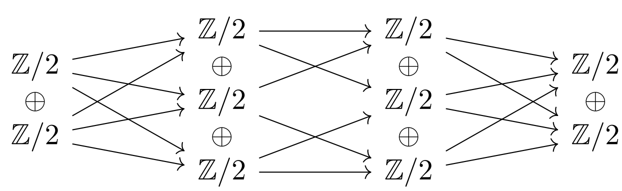
---

19 | Annulation

Soient (C, d) un complexe de chaînes sur un anneau R, $m \in \mathbb{Z}$ et C'_m, C'_{m-1}, A des R-modules tels que

$$C_m = C'_m \oplus A \quad \text{et} \quad C_{m-1} = C'_{m-1} \oplus A$$

et le composant $A \to A$ de $d_m \colon C'_m \oplus A \to C'_{m-1} \oplus A$ est l'identité 1_A sur A (où, plus général, un isomorphisme). Montrez que (C, d) est homotopiquement équivalent à un complexe de chaînes (C', d') où $C'_n = C_n$ si $n \neq m, m-1$ et d' est une différentielle à déterminer.
En utilisant ce résultat, calculez l'homologie du complexe représenté par la diagramme suivante



où une flèche signifie que le composant de la différentielle entre les deux termes est l'identité, et pas de flèche signifie que le composant est 0. Pour vérifier votre résultat, calculez l'homologie directement à partir de la définition de l'homologie.

20 | Scindage

Soit R un anneau et

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

une suite exacte courte des R-modules. Montrez que les énoncés suivants sont équivalents:

(i) Il y a un homomorphisme $r \colon B \to A$ tel que $r \circ i = 1_A$.

(ii) Il y a un homomorphisme $s \colon C \to B$ tel que $j \circ s = 1_C$.

(iii) Il y a un isomorphisme $B \cong A \oplus C$ tel que la diagramme à droite, où les homomorphisme de la deuxième ligne sont donnés par $a \mapsto (a, 0)$ et $(a, c) \mapsto c$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "j"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[r] & A \oplus C \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Si les trois énoncés sont vrai, $(*)$ est appelé une **suite exacte courte scindée** ; r est appelé une **rétraction de** i et s une **section de** j. Déduisez que $(*)$ est scindée si C est libre comme R-module (c-à-d isomorphe à une somme directe des copies de R considéré comme un R-module).

21 | Exactement !

Pour chaque suite exacte des groupes abéliens et homomorphismes, essayez de découvrir autant que possible sur le groupe G et l'homomorphisme α. Justifiez soigneusement votre réponse !

(i) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

(ii) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$

(iii) $0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$

(iv) $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

22 | Euler

Soit (C, d) un complexe de chaînes sur un corps k. Supposez que (C, d) est **fini** (c-à-d C_n est un espace vectoriel sur k de dimension fini) et **délimité** (c-à-d $C_n = 0$ pour tout n sauf un nombre fini). Soit H_* l'homologie de (C, d). En utilisant le théorème du rang, montrez que

$$\chi(C, d) := \sum (-1)^n \dim_k(C_n) = \sum (-1)^n \dim_k(H_n).$$

$\chi(C, d)$ est appelé la **caractéristique d'Euler** de (C, d). Soit

$$0 \to (C', d') \to (C, d) \to (C'', d'') \to 0$$

une suite exacte courte des complexes de chaînes sur un corps k qui sont finis et délimités. En utilisant la suite exacte longue induite, déduisez que

$$\chi(C, d) = \chi(C', d') + \chi(C'', d'').$$

23 | Pascal

Soit X un espace topologique tel que $H_n(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{d_n}$ pour tout n où $d_n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. En utilisant une décomposition d'un cercle S^1 en deux ouverts, calculez l'homologie de $H_n(X \times S^1)$ en fonction de d_n. Puis, calculez l'homologies des tores

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}, \quad n > 0.$$

24 | Inintéressant

Soit

$$f\colon \left(I \times D^2\right) \amalg \coprod_{\text{finie}} \left(S^1 \times D^2\right) \longrightarrow D^3$$

une application continue qui est injective et envoie $\partial I \times D^2$ à ∂D^3. De plus, soit

$$E = f\left(\left(I \times \{0\}\right) \amalg \coprod_{\text{finie}} \left(S^1 \times \{0\}\right)\right).$$

Calculez l'homologie de $D^3 \smallsetminus E$. (Un tel E est appelé un **enchevêtrement avec deux fins**.)

★ Dimensions réels

Soient $n, m \in \mathbb{Z}^{>0}$. Montrez que $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ ssi $n = m$.

---

date limite: mardi 27/03/2018 (cours 25), 10:30 au début de la classe

Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius **hiver 2018**
22/03/2018

Topologie algébrique
Devoirs 5

---

25 | Fidget spinner

Soit $p\colon \tilde{X} \to X$ un revêtement à n feuillets d'un complexe cellulaire connexe et fini. Montrez que $\chi(\tilde{X}) = n \cdot \chi(X)$. Déduisez qu'une surface orientée Σ_g de genre $g > 1$ est un revêtement d'une surface orientée Σ_h de genre h ssi $(g-1)$ est divisible par $(h-1)$. Finalement, montrez que, si $\Sigma_1 \to \Sigma_h$ est un revêtement, $h = 1$.

26 | Suspension

Soit X un espace topologique et $S(X)$ sa suspension (voir question 6).

(i) Montrez que $S(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1}.

(ii) En utilisant la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, montrez que

$$\tilde{H}_n(S(X)) \cong \tilde{H}_{n-1}(X).$$

(iii) Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, soit $S(f)\colon S(X) \to S(Y)$ induite par

$$f \times \mathrm{id}\colon X \times [-1,1] \to Y \times [-1,1].$$

Montrez que la diagramme suivante commute:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_{n-1}(X) & \xleftrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S(X)) \\ \big\downarrow f_* & & \big\downarrow S(f)_* \\ \tilde{H}_{n-1}(Y) & \xleftrightarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S(Y)) \end{array}$$

(iv) Déduisez que pour tout $n \geqslant 1$ et $d \in \mathbb{Z}$, il existe une application $f\colon S^n \to S^n$ de degré d.

27 | Platon

(i) Supposons que nous avons une décomposition d'une sphère en polygones, alors un homéomorphisme entre un complexe cellulaire et S^2. Soit F le nombre des 2-cellules (faces), A le nombre des 1-cellules (arêtes) et S le nombre des 0-cellules (sommets). Montrez que $S - A + F = 2$.

(ii) Soit F_n le nombre des faces avec exactement n arêtes et S_n le nombre des sommets avec exactement n arêtes. Montrez que

$$\sum_n nF_n = 2A = \sum_n nS_n.$$

(iii) Supposons que chaque face et chaque sommet a au minimum trois arêtes. Déduisez que $F_3 = 0$ implique $A \geqslant 2F$ et $S_3 = 0$ implique $A \geqslant 2S$. Déduisez que $F_3 + S_3 > 0$.

(iv) Supposons de plus que $A > 0$, $F = F_p$ et $S = S_q$, alors que nous avons un polyèdre régulier. Déduisez que
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$
et trouvez tous couples (p, q) qui satisfont cette condition. (Ils sont les **solides de Platon**.)

28 | Chasse de diagramme

Considérez la diagramme commutative suivante,

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & A_5 \arrow[d, "h_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

dont les lignes et colonnes sont exactes. Montrez que h_3 est un isomorphisme si h_1, h_2, h_4 et h_5 sont isomorphismes. Est-il possible d'assouplir ces conditions ?

29 | Espaces projectifs

(i) Rappelons que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est obtenu de la sphère S^n en identifiant des points opposés. Équivalemment, en restreignant la sphère à une hémisphère, $\mathbb{R}P^n$ peut être interprété aussi comme le quotient du disque D^n par la relation d'équivalence $x \sim -x$ pour $x \in \partial D^n$. Déduisez qu'il existe un complexe cellulaire avec une k-cellule pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$ et calculez l'homologie de $\mathbb{R}P^n$. De plus, calculez le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^n$.

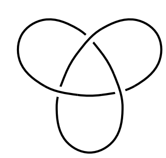
(ii) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de la sphère S^{2n+1} par la relation d'équivalence
$$x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| = 1.$$
Montrez qu'on peut aussi écrire $\mathbb{C}P^n$ comme un quotient d'un disque D^{2n} par la même relation d'équivalence sur sa frontière $\partial D^{2n} = S^{2n-1}$. Déduisez qu'il existe un complexe cellulaire avec une $2k$-cellule pour chaque $k \in \{0, \dots, n\}$ et calculez l'homologie de $\mathbb{C}P^n$. De plus, calculez le groupe fondamental de $\mathbb{C}P^n$.

30 | Libre de points fixes

Soient $p\colon S^{2k} \to X$ un revêtement et $G = \pi_1(X, x_0)$. Rappelons que G agit librement sur S^{2k}. Montrez que pour tout $g \in G \setminus \{1_G\}$, l'homomorphisme $g_*\colon H_{2k}(S^{2k}) \to H_{2k}(S^{2k})$ est la multiplication par -1. Déduisez que G est trivial ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, et que $\mathbb{R}P^{2k}$ n'est pas un revêtement non-trivial d'un autre espace.

★ Nouée

Soient p et q deux entiers copremiers. Considérez un lacet γ défini par la paramétrisation



$$x = r\cos(p\varphi), \quad y = r\sin(p\varphi), \quad z = \cos(q\varphi) \quad \text{où } r = 2 + \sin(q\varphi).$$

γ définit le **nœud de tore** associé au couple (p, q). Si $p = 2$ et $q = 3$, on obtient le **nœud de trèfle**, dessiné à droite. Calculez les groupes fondamentaux des compléments de ces nœuds.