Université de Sherbrooke
Claudius Zibrowius **hiver 2018**
13/02/2018

Topologie algébrique
examen blanc

Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours sans justification, **à condition qu'ils soient clairement indiqués**.

1 | Tout est égal

Donnez la définition d'un homéomorphisme entre deux espaces topologiques. Soit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories. Montrez l'assertion suivante: Si f est un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{C}$, $F(f)$ est un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{D}$. L'inverse est-il aussi vrai ? (Si oui, donnez une démonstration ; sinon, trouvez un contre-exemple.)

2 | Une homotopie circulaire

Reproduisez soigneusement la définition d'une homotopie entre deux applications. Puis, montrez qu'une application continue $f\colon\ S^{n-1} \to X$ est homotope à une application constante si et seulement s'il existe une application continue $g\colon\ D^n \to X$ dont la restriction à $\partial D^n = S^{n-1}$ est égale à f.

3 | Liberté des lacets

Soit X un espace qui est connexe par arcs et $x \in X$ un point. Écrivons $[S^1, X]$ pour l'ensemble des application $S^1 \to X$ à homotopie près. Montrez que l'application d'oubli

$$\begin{gathered} \pi_1(X, x) \to [S^1, X] \\ \Big[\gamma\colon\ (S^1, *) \to (X, x)\Big] \mapsto \Big[\gamma\colon\ S^1 \to X\Big] \end{gathered}$$

est surjective. De plus, montrez que deux éléments de $\pi_1(X, x)$ ont la même image si et seulement s'ils sont conjugués.

4 | Pushouts

Soient $f_1\colon\ Y \to X_1$ et $f_2\colon\ Y \to X_2$ deux applications continues. Décrivez soigneusement la construction du pushout $X_1 +_Y X_2$ et aussi sa propriété universelle (sans démonstration). Montrez que si f_2 est une inclusion, l'application $X_1 \to X_1 +_Y X_2$ du pushout l'est aussi.

Soient $n > 1$, $f_1 : (S^{n-1}, *) \to (X, x_0)$ et $f_2 : (S^{n-1}, *) = (\partial D^n, *) \hookrightarrow (D^n, *)$. Donc, par définition,

$$X \cup_f D^n := X +_{S^{n-1}} D^n.$$

Décrivez soigneusement (mais sans démonstration) comment on peut calculer $\pi_1(X \cup_f D^n, x_0)$ de $\pi_1(X, x_0)$. Finalement, trouvez tous les groupes fondamentaux possibles des espace obtenus en collant la frontière d'un disque D^2 à un cercle S^1.
