

Topologie algébrique exercices supplémentaires

1 | Borsuk-Ulam

Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. Donnez la définition d'un relèvement d'un chemin sur X et reproduisez soigneusement le lemme de relèvements des chemins (sans démonstration). En considérant un chemin entre deux points opposés sur S^2 (ou autrement), montrez qu'il n'y a pas d'application continue $f: S^2 \rightarrow S^1$ telle que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^2$.

2 | Bricolage

Construisez un complexe cellulaire X avec une seule 0-cellule x_0 tel que $\pi_1(X, x_0) = \langle a, b, c | a^2, b^2, c^2 \rangle$. Puis, construisez soigneusement le revêtement $p: \tilde{X} \rightarrow X$ associé au noyau de l'homomorphisme

$$\varphi: \langle a, b, c | a^2, b^2, c^2 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto (1, 0), \quad b \mapsto (0, 1), \quad c \mapsto (0, 0).$$

Finalement, calculez les complexes de chaînes cellulaires de X et $\tilde{X}$ et ses homologies.

3 | Mayer-Vietories

En utilisant la suite exacte longue de Mayer-Vietories, calculez l'homologie ...

- (i) ... des sphères.
- (ii) ... des surfaces orientables.
- (iii) ... des surfaces non-orientables.

[Indice pour (ii) et (iii): Utilisez la même décomposition qu'on a utilisé pour calculer les groupes fondamentaux.]

4 | Carrousel

Construisons un espace X comme suit: Soient Z_1, Z_2 et Z_3 des copies de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Pour chaque $i = 1, 2, 3$, soient $x_i = (0, 0, 1)$ le pôle Nord et $y_i = (0, 0, -1)$ le pôle Sud. Puis, définissons

$$X = (Z_1 + Z_2 + Z_3) / \sim,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence donnée par $x_1 \sim y_2, x_2 \sim y_3$ et $x_3 \sim y_1$.

- (i) Décrivez le revêtement universel de X et calculez le groupe fondamental de X .
- (ii) Prouvez que X n'est pas homotopiquement équivalent à un cercle S^1 .
- (iii) Trouvez une application $f: S^1 \vee S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$ dont l'homomorphismes induits au niveau de l'homologie sont isomorphismes, mais qui n'est pas homotope à l'identité.

5 | Heegaard cuit des lentilles

Soit $L = S^1 \times D^2 +_{S^1 \times S^1} D^2 \times S^1$ le pushout de la diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \hookrightarrow & S^1 \times D^2 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ D^2 \times S^1 & \longrightarrow & L \end{array}$$

où f est définie par $(z, w) \mapsto (z^a w^b, z^c w^d)$ pour certains entiers a, b, c, d satisfaisant $ad - bc = \pm 1$. L est appelé un **espace lenticulaire**.

- (i) Reproduisez soigneusement la version du théorème de Seifert-van Kampen pour un recouvrement d'un espace par deux sous-espaces fermés.
- (ii) Montrez que le groupe fondamental $\pi_1(L)$ est cyclique et déterminez son ordre.
- (iii) Reproduisez le théorème de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris et décrivez soigneusement la définition de l'homomorphisme de bord dans cette suite exacte longue.
- (iv) Calculez l'homologie de L en fonction de a, b, c et d .

6 | Non-sphérique

- (i) Soit $f: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement. Reproduisez soigneusement le critère de relèvement d'une application $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ où Y est un espace sympa.
- (ii) Montrez que toute application $f: S^n \rightarrow T^2$ pour $n > 1$ est contractile.
- (iii) Soit Σ_g la surface de genre $g > 1$. Montrez que toute application $f: S^n \rightarrow \Sigma_g$ pour $n > 1$ est contractile.

★ La sphère d'homologie de Poincaré

- (i) Par l'exercice supplémentaire des devoirs 5, le groupe fondamental du complément X d'un voisinage tubulaire du nœud de trèfle K a une présentation

$$\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle.$$

Montrez que $\mu = b^{-1}a$ est le méridien de K et μ et $\lambda = a^2$ engendrent le groupe fondamental de $\partial X \cong T^2$. De plus, montrez que $\lambda_0 = \lambda\mu^{-6}$ est 0 dans l'abélianisé $H_1(X)$ de $\pi_1(X)$ (qui est égal à $\mathbb{Z}\mu$ par la question 24 des devoirs 4).

- (ii) Soit Y l'espace obtenu en collant une 2-cellule le long $\lambda_0\mu = \lambda\mu^{-5}$. Calculez $\pi_1(Y)$ et montrez que le groupe n'est pas trivial. [Indice: Trouvez un homomorphisme non trivial au groupe symétrique S_5 .] De plus, montrez que l'homologie de Y est égale à l'homologie d'un point, mais Y n'est pas contractile.
- (iii) Soit P l'espace obtenu en identifiant ∂X avec la frontière d'un tore solide $S^1 \times D^2$ de telle façon que $\lambda_0\mu$ est contractile dans $S^1 \times D^2$. (On dit que $P = S^3_1(K)$ est obtenu par 1-chirurgie de Dehn le long K .) Montrez que l'homologie de P est égale à l'homologie de S^3 , mais Y n'est pas homéomorphe à S^3 . P est appelée **la sphère d'homologie de Poincaré**.