Klausur Elementargeometrie (LR)

WS 2021/22, 21. Februar 2022, 10:15–11:45

Unbedingt ausfüllen!	
Vorname:	______________________
Name:	______________________
Matrikelnummer:	______________________

Hinweis: Alle Aussagen der Vorlesung können verwenden werden, solange sie klar benannt werden bzw. klar ist, wie sie verwendet werden, und sie nicht direkt einer zu beweisenden Aussage entsprechen.

1 | Kramladen [1+1+1+1+1+2+2+1 Punkte]

In den ersten fünf Teilaufgaben (a)–(e) brauchst Du Deine Antwort nicht begründen.

(a) Wieviele verschiedene Punkte reichen aus, um eine Gerade in der euklidischen Ebene eindeutig zu beschreiben?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ Das kann man allgemein nicht sagen.

(b) Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren Aussage:

Der Mittelpunkt des Umkreises eines jeden Dreiecks ist gleich dem Schnittpunkt ...

(c) Seien P ein Punkt der euklidischen Ebene und $r > 0$ eine positive reelle Zahl. Beschreibe die Punkte, die auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r liegen.

(d) Was ist die Summe der Innenwinkel eines einfachen Fünfecks?

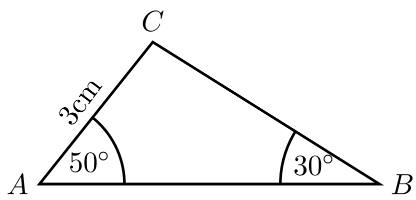
(e) Seien ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke mit $\ell(\overline{AB}) = 4\text{cm}$ und $\ell(\overline{A'B'}) = 8\text{cm}$. Was ist das Verhältnis

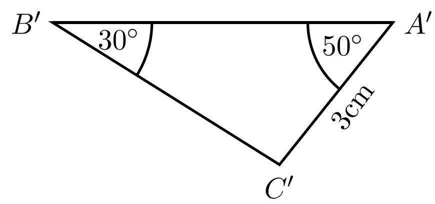
$$\frac{\text{Flächeninhalt von } \Delta ABC}{\text{Flächeninhalt von } \Delta A'B'C'}?$$

In den folgenden beiden Teilaufgaben (f) und (g) betrachten wir jeweils zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$, über die bestimmte Informationen (Winkelgrößen und Seitenlängen) angegeben sind. Entscheide jeweils, ob die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ notwendigerweise kongruent zueinander sind. Begründe Deine Antworten.

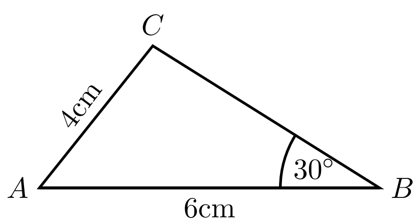
Hinweis: Die Skizzen sind nicht maßstabsgerecht!

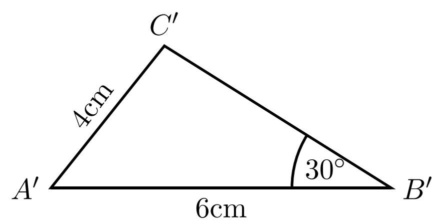
(f)





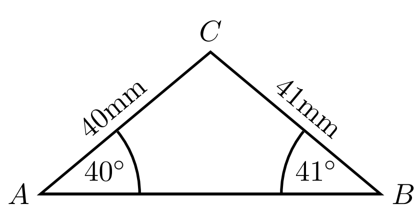
(g)





(h) Gibt es ein Dreieck mit den folgenden Winkel- und Seitenmaßen? Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht!



2 | Frühsport **[1+1+2+2+2+2 Punkte]**

(a) Berechne den euklidischen Abstand $d(A, B)$ zwischen den Punkten $A = (6, 3)$ und $B = (2, -2)$.

(b) Sei σ_g eine Spiegelung an einer Geraden g. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren, nicht-tautologischen Aussage: (Du brauchst Deine Antwort nicht zu begründen.)

$$\text{Für alle Punkte } P \in \mathbb{E} \text{ gilt: } \sigma_g(P) = P \text{ genau dann, wenn } \ldots$$

(c) Wir wissen, dass jede längenerhaltende Abbildung der euklidischen Ebene winkelerhaltend ist. Gilt auch die Umkehrung? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.

In den folgenden Teilaufgaben (d)–(f) werden Koordinaten von Punkten $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$ in der euklidischen Ebene angegeben. Beantworte jeweils die folgenden Frage:

Wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$?

Begründe Deine Antwort. Im Fall, dass Du Bewegungen gefunden hast, beschreibe sie geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

(d) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(e) $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -3 \end{smallmatrix}\right), \quad B = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(f) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

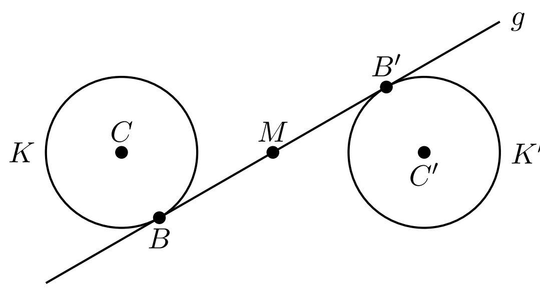
3 | Die Tangenten von Thales **[1+2+3+2+2 Punkte]**

(a) Seien C und C' zwei Punkte in der euklidischen Ebene. Beschreibe (ohne Beweis) die Punkte der Ebene, die auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CC'}$ liegen.

(b) Gegeben seien zwei Punkte C und C' in der Ebene:

Konstruiere in der obigen Zeichnung den Mittelpunkt der Strecke $\overline{CC'}$ mit Zirkel und Lineal. Beschreibe sorgfältig und detailiert in Worten, wie die Konstruktion im Allgemeinen funktioniert, d.h. für beliebige Punkte C und C' der Ebene. (Du brauchst nicht begründen, weshalb die Konstruktion richtig ist.)

(c) Seien K und K' zwei Kreise, die den gleichen Radius haben, die nicht ineinander enthalten sind und die sich nicht berühren. Seien C und C' die Mittelpunkte der beiden Kreise. Sei g eine Gerade, die K und K' in jeweils genau einem Punkt berührt derart, dass C und C' auf verschiedenen Seiten von g liegen. Sei B der Berührpunkt von K mit g sowie B' der Berührpunkt von K' mit g. Sei zudem M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BB'}$. Hier ist eine Skizze:



Sind die Dreiecke ΔMBC und $\Delta MB'C'$ kongruent? Begründe kurz Deine Antwort.

(d) Seien K und K' zwei Kreise wie in (c). Beschreibe, wie man mittels Zirkel und Lineal eine Gerade g mit den in (c) genannten Eigenschaften konstruieren kann. Wichtig: Falls Du dabei Mittelpunkte von Strecken konstruieren musst, brauchst Du dies nicht detailliert beschreiben, denn das hast Du ja bereits in (b) gemacht. Schreibe in dem Fall einfach: *Konstruiere den Mittelpunkt der Strecke ...*

(e) Begründe die Korrektheit Deiner Konstruktion aus (d).