Klausur Elementargeometrie (LR)

WS 2021/22, 14. März 2022, 10:15–11:45

Unbedingt ausfüllen!

Vorname: ______________________

Name: ______________________

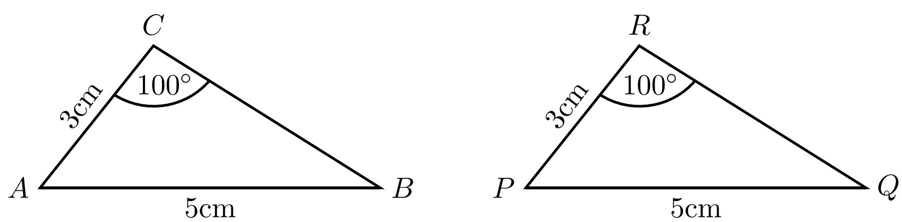
Matrikelnummer: ______________________

Hinweis: Alle Aussagen der Vorlesung können verwenden werden, solange sie klar benannt werden bzw. klar ist, wie sie verwendet werden, und sie nicht direkt einer zu beweisenden Aussage entsprechen.

1 | Kongruenzen **[2+2 Punkte]**

(a) Betrachte die folgenden zwei Dreiecke ΔABC und ΔPQR, über die bestimmte Informationen (Winkelgrößen und Seitenlängen) angegeben sind:

Hinweis: Die Skizzen sind nicht maßstabsgerecht!

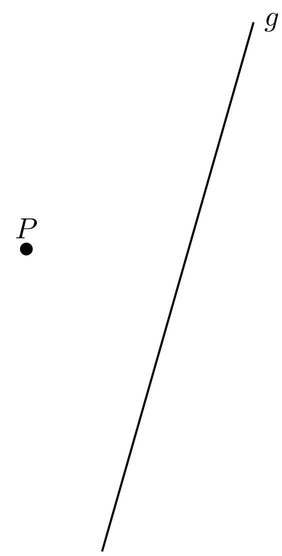


Entscheide, ob ΔABC und ΔPQR notwendigerweise kongruent sind. Begründe Deine Antwort.

(b) Sei ΔABC ein Dreieck mit zwei gleich großen Innenwinkeln. Ist das Dreieck dann gleichschenklig? Wenn ja, gebe einen Beweis! Wenn nein, gebe ein Gegenbeispiel!

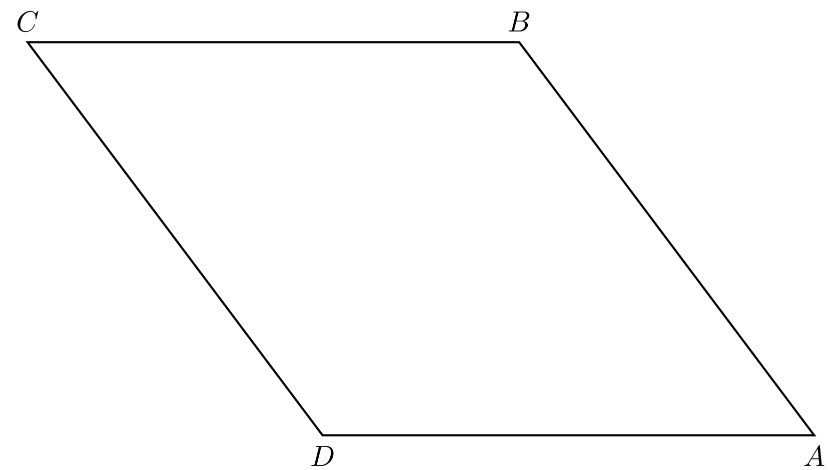
2 | Ausgelotete Konstruktionen **[3+3 Punkte]**

(a) Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt:



Fälle in der obigen Zeichnung mit Zirkel und Lineal das Lot von dem Punkt P auf die Gerade g. Beschreibe sorgfältig und detailliert in Worten, wie die Konstruktion im Allgemeinen funktioniert, d.h. für beliebige Geraden g und Punkte $P \notin g$. (Du brauchst nicht begründen, weshalb die Konstruktion richtig ist.)

(b) Sei $ABCD$ eine Raute, also ein Viereck, dessen Seiten alle gleich lang sind:



Konstruiere in der obigen Zeichnung mit Zirkel und Lineal einen Kreis K derart, dass alle Seiten der Raute den Kreis K tangential berühren. Beschreibe sorgfältig und detailliert in Worten, wie die Konstruktion im Allgemeinen funktioniert, d.h. für beliebige Rauten $ABCD$. Wichtig: Falls Du dabei Lote fällen musst, brauchst Du dies nicht detailliert beschreiben, denn das hast Du ja bereits in (a) gemacht. Schreibe in dem Fall einfach: *Fälle das Lot von Punkt ... auf die Strecke/Gerade ...* (Du brauchst nicht begründen, weshalb die Konstruktion richtig ist.)

3 | Frühsport **[1+1+2+2+2+2 Punkte]**

(a) Sei $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine Abbildung. Definiere, was es für f bedeutet, längenerhaltend zu sein.

(b) Zeige, dass die Verknüfung $f \circ g$ zweier längenerhaltender Abbildungen $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ und $g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ wieder längenerhaltend ist.

(c) Seien g und h zwei Geraden und σ_g bzw. σ_h die Spiegelung an g bzw. h. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren, nicht-tautologischen Aussage: (Du brauchst Deine Antwort nicht zu begründen.)

$$\text{Für alle } P \in \mathbb{E} \text{ gilt: } \sigma_g \circ \sigma_h(P) = P \text{ genau dann, wenn } \ldots$$

In den folgenden Teilaufgaben (d)–(f) werden Koordinaten von Punkten $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$ in der euklidischen Ebene angegeben. Beantworte jeweils die folgenden Frage:

Wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$?

Begründe Deine Antwort. Im Fall, dass Du Bewegungen gefunden hast, beschreibe sie geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

(d) $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(e) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(f) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

4 | Euklid bei Besuch auf einer Sphäre **[1+1+1+1+1 Punkte]**

Wir hatten in der Vorlesung gelernt, dass Großkreise in der sphärischen Geometrie dieselbe Rolle spielen wie Geraden in der euklidischen Geometrie. Ebenso spielen die kürzesten Geodäten die Rolle von Strecken. In den folgenden ersten fünf Teilaufgaben (a)–(e) sind nun eine Reihe von Aussagen über die beiden Geometrien aufgeführt. Entscheide für jede Aussage, welche der folgenden Antwortmöglichkeiten die richtige ist: (Du brauchst Deine Antwort nicht zu begründen.)

A Die Aussage gilt nur in der sphärischen Geometrie.

B Die Aussage gilt nur in der euklidischen Geometrie.

C Die Aussage gilt in beiden Geometrien.

D Die Aussage gilt in keiner der beiden Geometrien.

(a) Zu jeder Geraden/jedem Großkreis g und jedem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade/ein Großkreis, die/der durch P geht und g nicht schneidet.

☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

(b) Jede Gerade/jeder Großkreis lässt sich durch zwei verschiedene Punkte festlegen.

☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

(c) Je zwei Geraden/Großkreise schneiden sich entweder in genau zwei Punkten oder sie stimmen überein.

☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

(d) Für beliebige Punkte A, B und C gilt

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C),$$

wobei $d(\cdot, \cdot)$ die Länge der Strecke/kürzesten Geodäte zwischen zwei Punkten bezeichnet.

☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

(e) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks ist gleich π.

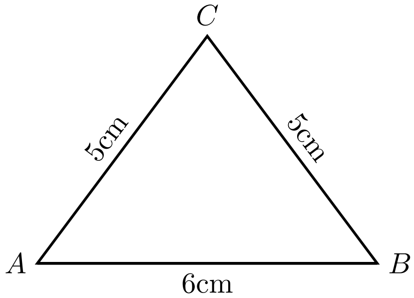
☐ **A** ☐ **B** ☐ **C** ☐ **D**

5 | Flächen vermessen mit einem englischen Reiher **[2+2+1 Punkte]**

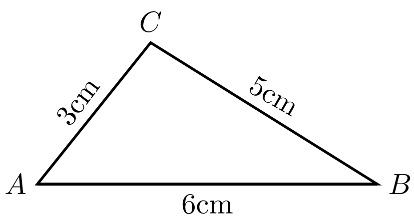
In den ersten beiden Teilaufgaben (a) und (b) ist jeweils ein Dreieck in der euklidischen Ebene angegeben. Bestimme jeweils den Flächeninhalt dieses Dreiecks und begründe kurz Deine Antwort.

Hinweis: Die Skizzen sind nicht maßstabsgerecht!

(a)



(b)



(c) Was ist der Flächeninhalt eines Dreiecks mit drei rechten Winkeln auf einer Sphäre von Radius 1? (Du brauchst Deine Antwort nicht begründen.)

☐ $\frac{\pi}{2}$	☐ π	☐ Der Flächeninhalt ist nicht eindeutig bestimmbar.
☐ $\frac{\pi^2}{2}$	☐ π^2	☐ Ein solches Dreieck gibt es gar nicht.