Probeklausur Elementargeometrie (LR)

WS 2021/22, 1,5 Stunden

Unbedingt ausfüllen!

Vorname: ______________________

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Hinweis: Alle Aussagen der Vorlesung können verwenden werden, solange sie klar benannt werden bzw. klar ist, wie sie verwendet werden, und sie nicht direkt einer zu beweisenden Aussage entsprechen.

1 | Kramkiste **[1+1+2+2+2+2 Punkte]**

(a) Was ist die Summe der Innenwinkel in einem einfachen Sechseck?
(Du brauchst Deine Antwort nicht begründen.)

(b) Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren (nicht-tautologischen) Aussage:
(Du brauchst Deine Antwort nicht begründen.)

Zwei Geraden sind nicht parallel genau dann, wenn ...

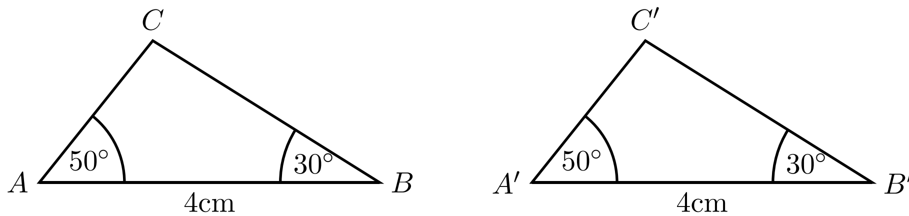
(c) Es sei ΔABC ein Dreieck. Zeige die folgende Aussage:

$$\angle BAC = \angle ABC \quad \Rightarrow \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}).$$

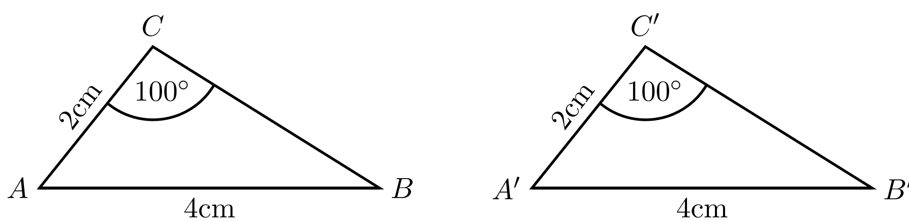
In den folgenden beiden Teilaufgaben (d) und (e) betrachten wir jeweils zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$, über die bestimmte Informationen (Winkelgrößen und Seitenlängen) angegeben sind. Entscheide jeweils, ob die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ notwendigerweise kongruent zueinander sind. Begründe Deine Antworten.

Hinweis: Die Skizzen sind nicht maßstabsgerecht!

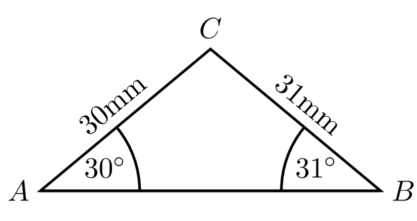
(d)



(e)



(f) Gibt es ein Dreieck mit den folgenden Winkel- und Seitenmaßen? Begründe Deine Antwort.



2 | Sportlich **[1+1+2+2+2+2 Punkte]**

(a) Definiere die Länge der Strecke $\overline{AB}$ zwischen zwei Punkten A und B in der euklidischen Ebene.

(b) Sei φ eine Drehung um einen Punkt C und einen Winkel α. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren, nicht-tautologischen Aussage: (Du brauchst Deine Antwort nicht zu begründen.)

Für alle Punkte $P \in \mathbb{E}$ gilt: $\varphi(P) = P$ genau dann, wenn ...

In den folgenden Teilaufgaben (c)–(f) werden Koordinaten von Punkten $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$ in der euklidischen Ebene angegeben. Beantworte jeweils die folgenden Frage:

Wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$?

Begründe Deine Antwort. Im Fall, dass Du Bewegungen gefunden hast, beschreibe sie geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

(c) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \binom{-2}{0} \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

(e) $A = \binom{-2}{1} \mapsto A' = \binom{3}{1}, \quad B = \binom{-1}{3} \mapsto B' = \binom{4}{3}, \quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{1}{2}$

(f) $A = \binom{0}{2} \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \binom{2}{0} \mapsto B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C = \binom{0}{3} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

3 | Thales' Sehnen nach Parallelen [1+3+2+4 Punkte]

(a) Seien P ein Punkt der euklidischen Ebene und $r > 0$ eine positive reelle Zahl. Beschreibe die Punkte, die auf dem Kreis mit Mittelpunkt P und Radius r liegen.

(b) Sei K ein Kreis. Vervollständige die folgenden Definitionen:

(i) Eine .... ist eine Gerade, die K nicht schneidet.

(ii) Eine .... ist eine Gerade, die K in genau einem Punkt schneidet.

(iii) Eine .... ist eine Gerade, die K in genau zwei Punkten schneidet.

(c) Was besagt der Satz des Thales?

(d) Seien A und B zwei Punkte auf einem Kreis derart, dass die Strecke $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises ist. Seien $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ zwei gleichlange Sehnen, die auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(A, B)$ liegen; siehe Skizze. Zeige, dass diese Sehnen parallel sind.