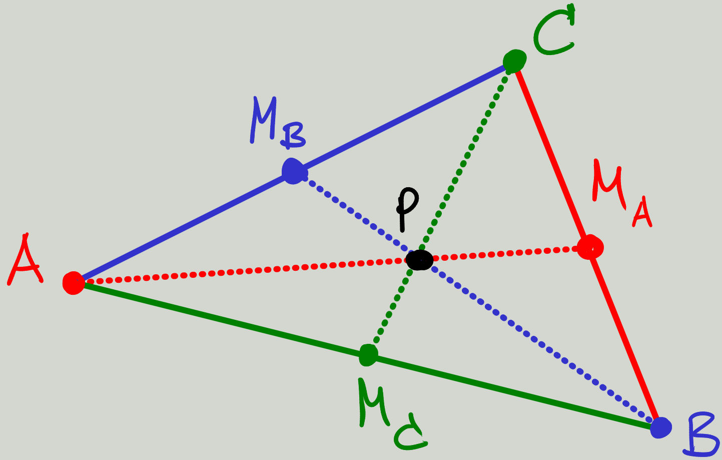
Vorlesung 14:

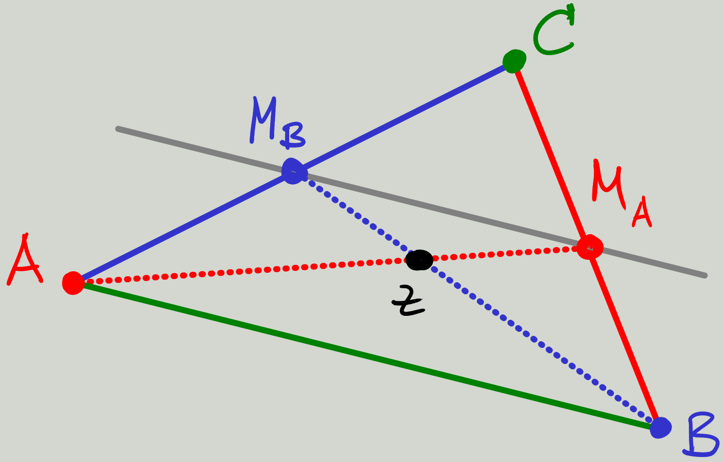


Satz: (7.8)

Die Seitenhalbierenden eines jeden Dreiecks schneiden sich in einem Punkt P. Dieser Punkt P zerteilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1; genauer:

$$\frac{\ell(\overline{PA})}{\ell(\overline{PM_A})} = \frac{\ell(\overline{PB})}{\ell(\overline{PM_B})} = \frac{\ell(\overline{PC})}{\ell(\overline{PM_C})} = \frac{2}{1}.$$

Beweis:



Behauptung 1:

Ist Z der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $\overline{AM_A}$ und $\overline{BM_B}$, so gilt

$$\frac{\ell(\overline{ZA})}{\ell(\overline{ZM_A})} = \frac{2}{1} = \frac{\ell(\overline{ZB})}{\ell(\overline{ZM_B})}$$

Nach Umkehrung des Strahlensatzes ist $g(M_A, M_B)$ parallel zu $g(A, B)$.

Zudem gilt:

$$\frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{M_A M_B})} = \frac{2}{1}.$$

Wende nun den Strahlensatz auf Z an:

$$\frac{\ell(\overline{ZA})}{\ell(\overline{ZM_A})} = \frac{\ell(\overline{ZB})}{\ell(\overline{ZM_B})} = \frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{M_A M_B})}$$

Also stimmt Behauptung 1.

<u>Behauptung 2:</u>

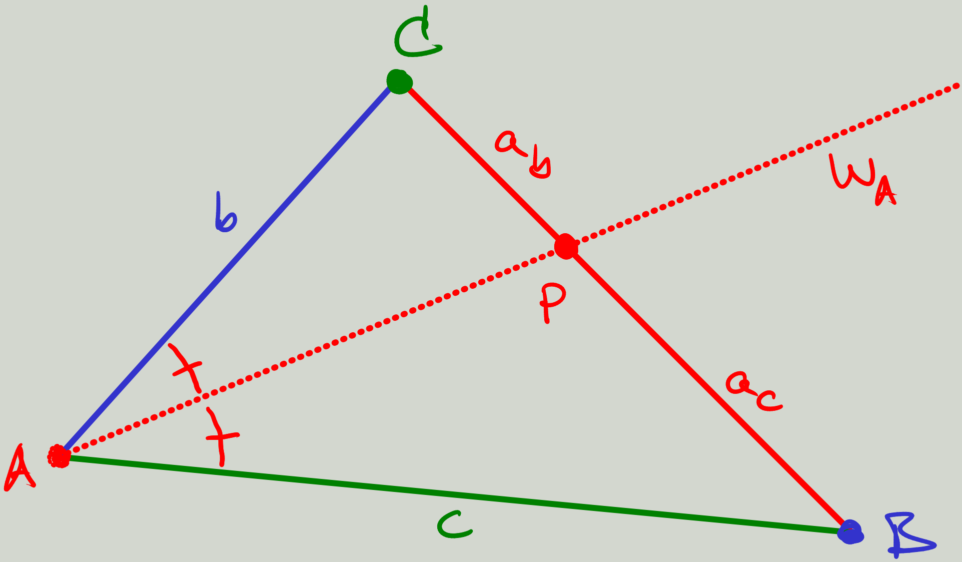
Ist Z' der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $\overline{AM_A}$ und $\overline{CM_C}$, so gilt:

$$\frac{\ell(\overline{Z'A})}{\ell(\overline{Z'M_A})} = \frac{2}{1} = \frac{\ell(\overline{Z'C})}{\ell(\overline{Z'M_C})}$$

Also gilt:

$$\frac{\ell(\overline{Z'A})}{\ell(\overline{Z'M_A})} = \frac{2}{1} = \frac{\ell(\overline{ZA})}{\ell(\overline{ZM_A})}$$

Es folgt $z = z'$ ist der gemeinsame Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. $\blacksquare$

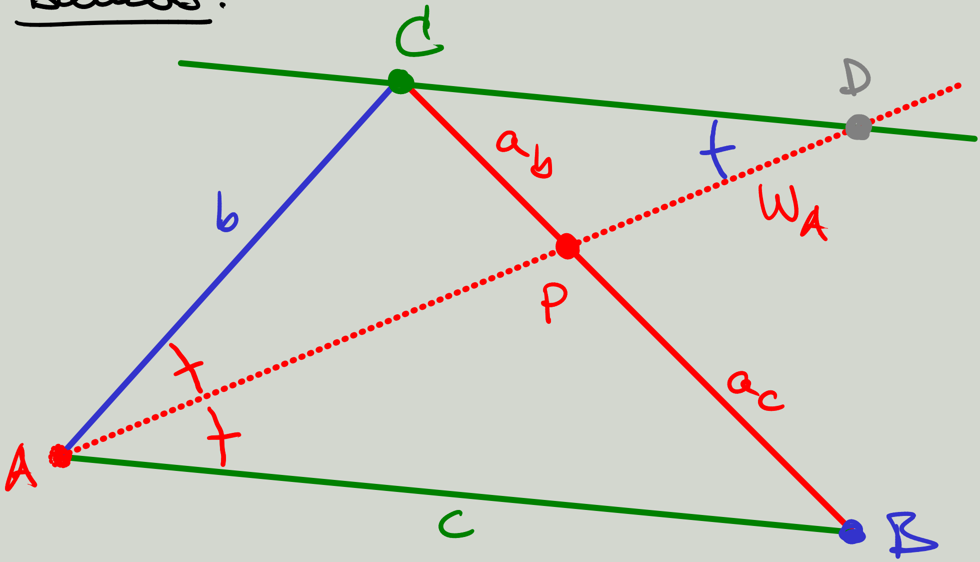


Satz:

Jede Winkelhalbierende in einem Dreieck zerteilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}$$

Beweis:



Sei D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden W_A mit der Geraden durch C, die parallel ist zur Seite c.

Nach Wechselwinkelsatz gilt:

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ADC.$$

Also ist $\triangle ADC$ gleichwinklig, also auch gleichschenklig:

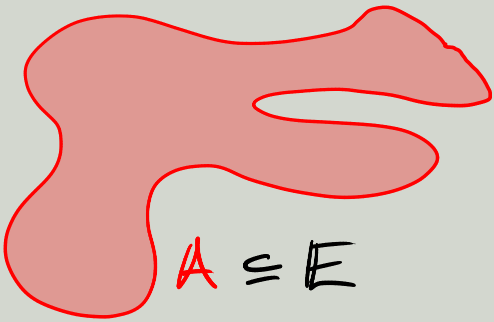
$$\ell(\overline{DC}) = b$$

Nach Strahlensatz angewendet auf P gilt:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{\ell(\overline{DC})}{c} = \frac{b}{c}.$$

∎

§ Flächeninhalte



$A \subseteq E \quad \longmapsto \quad 5{,}87\,\mathrm{cm}^2$

Naive Definition

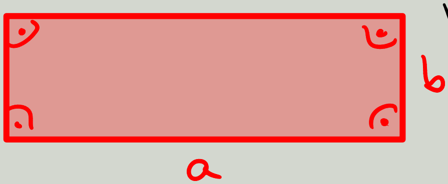
Der Flächeninhalt ist eine Funktion, die jeder Teilmenge der Ebene $A \subseteq E$ eine nicht-negative reelle Zahl

$$\mathcal{A}(A)$$

zuordnet

$\mathcal{A}$ für "Area"

Wünschenswerte Eigenschaften von $\mathcal{A}$

(1) $\mathcal{A}\Bigg($  $\Bigg) = a \cdot b$

für alle $a, b > 0$.

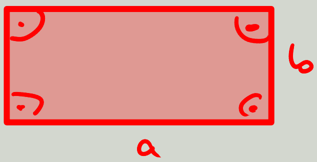
(2) $\mathcal{A}(\varphi(A)) = \mathcal{A}(A)$

für jede Bewegung $\varphi: E \to E$

(3) Ist s_λ eine Streckung um $\lambda > 0$, so gilt:

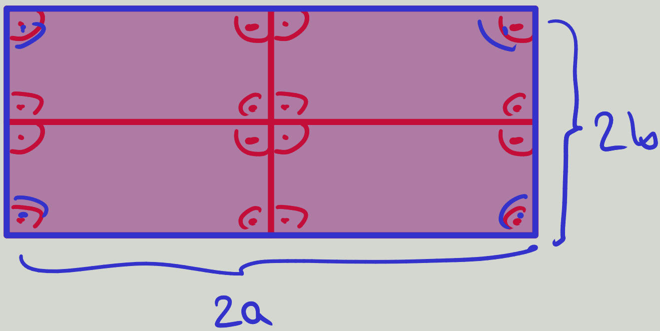
$$\mathcal{A}(s_\lambda(A)) = \lambda^2 \cdot \mathcal{A}(A)$$

Beispiel:

$A =$ 

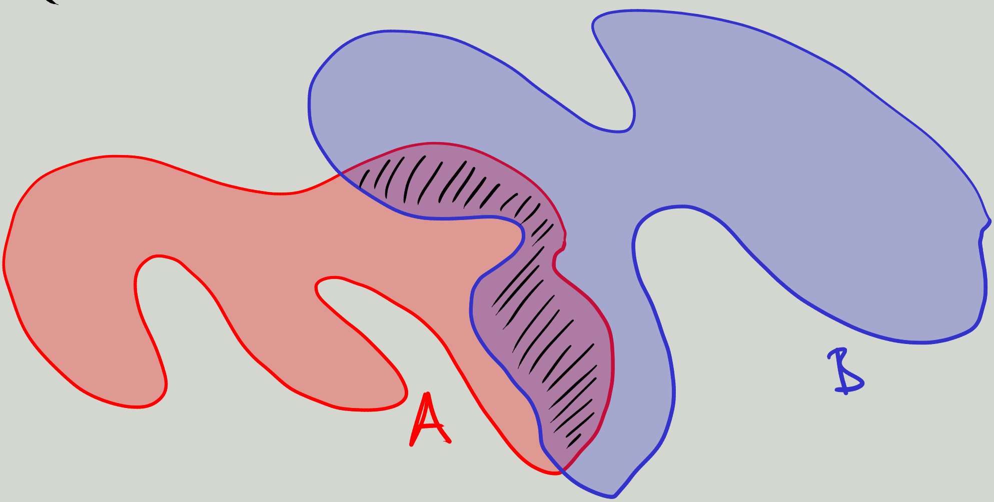
A passt viermal in $s_\lambda(A)$ hinein

für $\lambda = 2$

$s_\lambda(A) =$ 

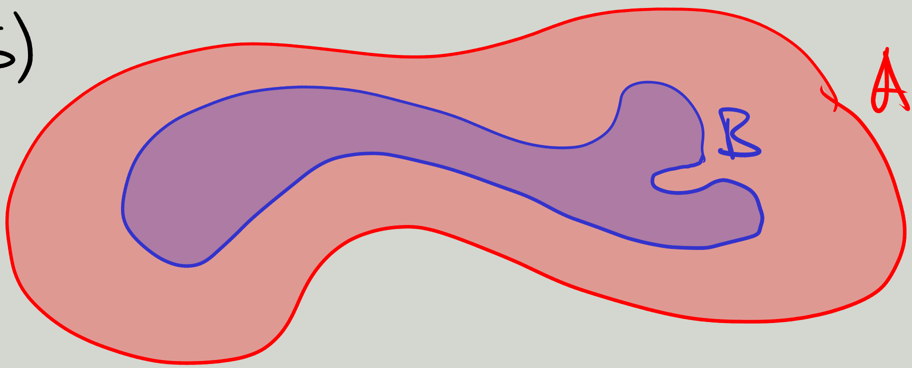
(4) $\mathcal{A}(\overline{PQ}) = 0$ für alle $P, Q \in \mathbb{E}$

(5)



$$\mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B) - \mathcal{A}(A \cap B)$$

(6)



$\mathcal{A}(B) \leq \mathcal{A}(A)$ für $B \subseteq A$.

Schlechte Nachricht:

Eine solche Funktion A gibt es leider nicht, weil es nicht messbare Teilmengen in $\mathbb{E}$ gibt. Siehe:

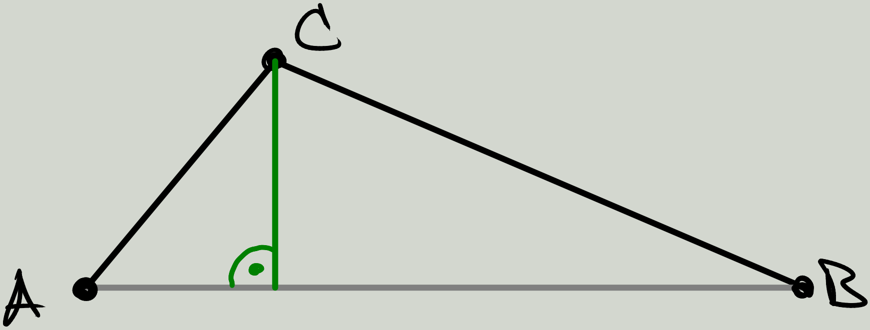
in Gegensatz zu

Maßtheorie

(Analysis III + Wahrscheinlichkeits-theorie)

Gute Nachricht:

Satz: Jeder "schönen" Teilmenge G von $\mathbb{E}$, d.h. jedem durch endlich viele Strecken und Kreissegmente begrenzten Gebiet G, lässt sich ein Flächenmaß $A(G)$ zuordnet derart, dass die Eigenschaften (1)-(6) für alle solche "schönen" Teilmengen erfüllt sind.



Korollar 1:

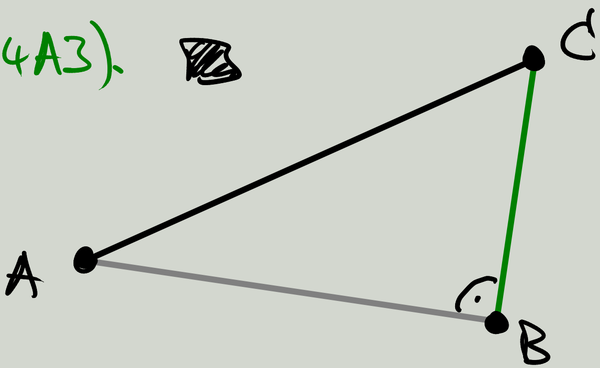
(1) $\mathcal{A}(\text{Dreieck}) = \frac{1}{2} \cdot (\text{Seitenlänge})$

$\cdot\, (\text{Länge der zugehörigen Höhe})$

(2) Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck mit einem rechten Winkel bei B, so gilt

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \ell(\overline{AB}) \cdot \ell(\overline{BC}).$$

<u>Beweis</u>: (Ü14A3).



Korollar 2:

Seien ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zwei ähnliche Dreiecke. Dann gilt:

$$\frac{\mathcal{A}(\Delta ABC)}{\mathcal{A}(\Delta A'B'C')} = \left(\frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{A'B'})}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\ell(\overline{AC})}{\ell(\overline{A'C'})}\right)^2 = \left(\frac{\ell(\overline{CB})}{\ell(\overline{C'B'})}\right)^2.$$

<u>Beweis:</u> Nach Annahme gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung $\varphi: E \to E$ derart, dass $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$, $\varphi(C') = C$.

Sei λ der Streckungsfaktor von φ.

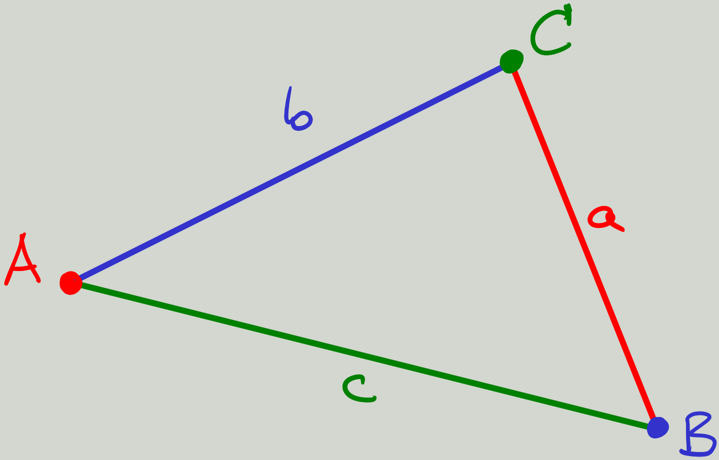
Nach Eigenschaft (3) von $\mathcal{A}$ gilt

$$\frac{\mathcal{A}(\Delta ABC)}{\mathcal{A}(\Delta A'B'C')} = \lambda^2.$$

Zudem verändert sich die Länge einer Strecke unter der Ähnlichkeitsabbildung φ genau um den Faktor λ:

$$\frac{\ell(\overline{AB})}{\ell(\overline{A'B'})} = \frac{\ell(\overline{AC})}{\ell(\overline{A'C'})} = \frac{\ell(\overline{CB})}{\ell(\overline{C'B'})} = \lambda .$$

$\blacksquare$



Satz: (Formel von Heron)

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

wobei

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Beweisidee*

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\cdot c \cdot \underbrace{(\text{Länge der Höhe auf } c)}_{?}$$

Um ? zu bestimmen, wendet man zweimal Pythagoras an; siehe z.B. Wikipediaeintrag zum Satz. $\blacksquare$

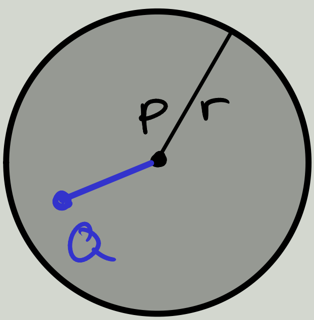
---

* nicht klausurrelevant.

Definition:

Eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $P \in E$ und Radius $r > 0$ ist

$$S(P,r) := \{\, Q \in E \mid \ell(\overline{PQ}) \le r \,\}$$



Satz:

Für $P \in \mathbb{E}$ und $r > 0$ gilt

$$\mathcal{A}(S'(P,r)) = \pi r^2.$$

<u>Beweis</u>: nicht klausurrelevant.

$\rightarrow$ Fragen zur Probeklausur? $\leftarrow$