Vorlesung 15:

Definition:

Kugel mit Radius $r > 0$:

$$K(r) := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2 \}$$

Sphäre mit Radius $r > 0$:

$$S^2(r) := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2 \}$$

Wir schreiben S^2 für $S^2(1)$.

Sind $P, Q \in S^2$, so heißt ein kürzester Weg von P nach Q auf S^2 Geodäte.

Ein Großkreis ist der Schnitt von S^2 mit einer Ebene durch den Ursprung.

Beispiele: Längenkreise sind Großkreise.

Der einzige Breitenkreis, der ein Großkreis ist, ist der Äquator.

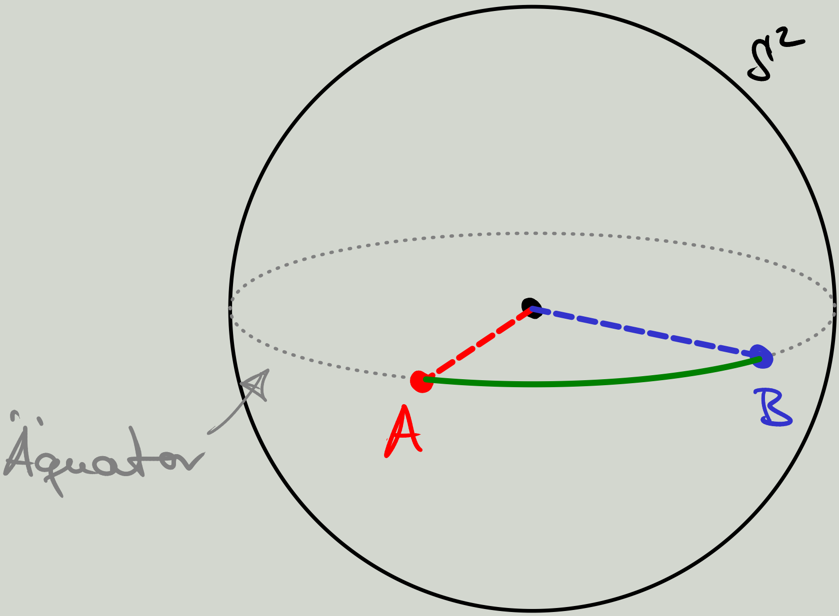
Satz:

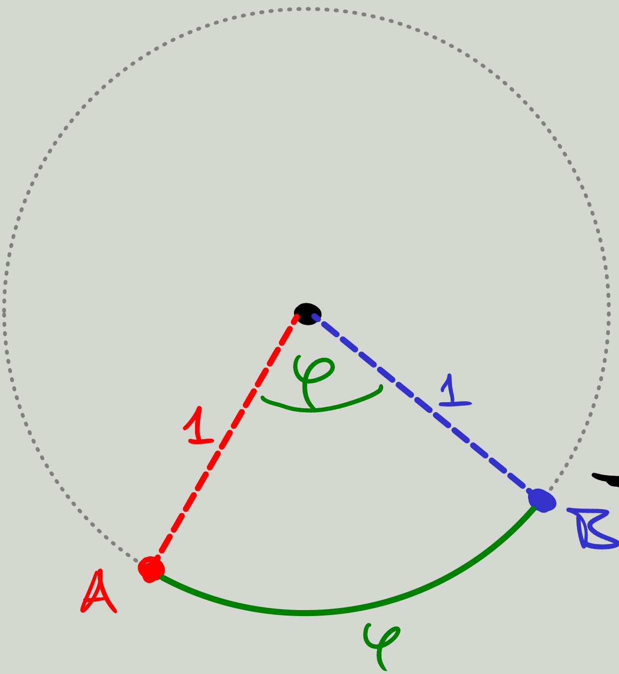
Seien $P, Q \in S^2$. Dann liegt jede Geodäte auf einem Großkreis. Zudem ist die Geodäte sowie der Großkreis eindeutig genau dann, wenn $P \neq \pm Q$.
Falls $P = \pm Q$, so gibt es unendlich viele Großkreise. $P = -Q$, so sind die Geodäten von P nach Q genau die Halbgroßkreise.

Definition:

Seien A und B zwei Punkte auf S^2. Dann ist der Abstand von A und B gleich der Länge einer Geodäte von A nach B.

Frage: Wie berechnet man diese Länge?





In der Ebene, die S^2 im Äquator schneidet, ist der Äquator ein Kreis.

Hier ist

$$\varphi = \text{Abstand von } A \text{ und } B.$$

Dies gilt nicht nur für den Äquator, sondern für beliebige Großkreise.

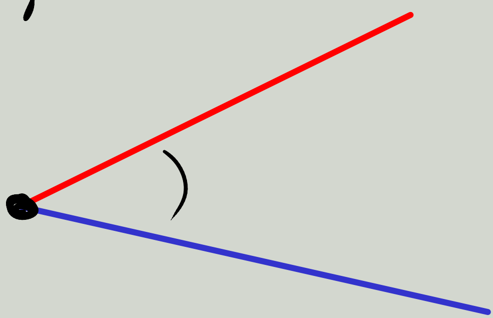
Bemerkung:

Geraden in $\mathbb{E}$ $\longleftrightarrow$ Großkreise in S^2

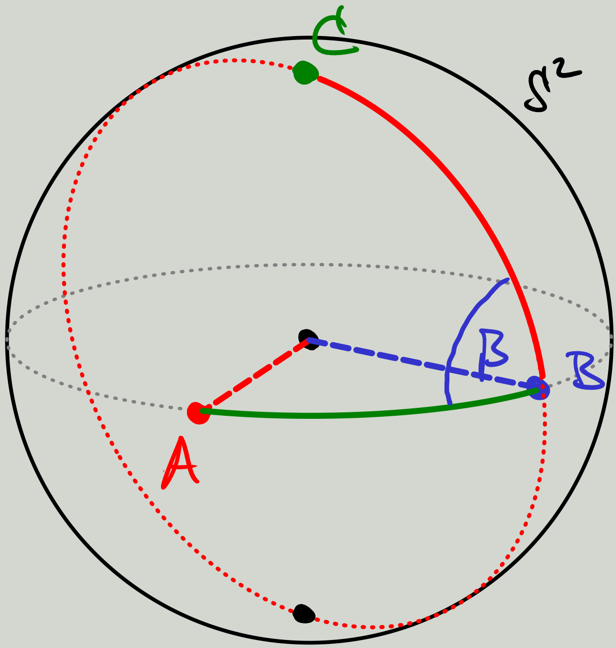
Strecken in $\mathbb{E}$ $\longleftrightarrow$ Geodäten in S^2

__Frage:__ Was ist mit Winkeln in S^2?

In $\mathbb{E}$ sind Winkel durch zwei Strahlen mit gleichem Anfangspunkt festgelegt:



Analog ist ein Winkel in S^2 durch zwei Geodäten festgelegt, die einen gemeinsamen Startpunkt haben.



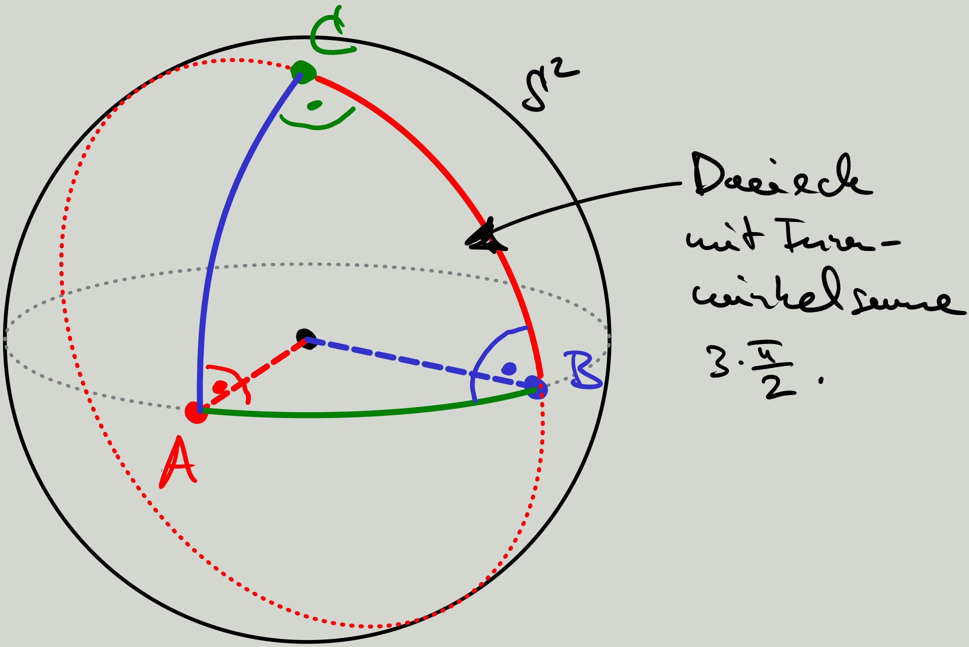
<u>Frage:</u> Was ist mit dem Winkelmaß auf S^2?

Jeder Punkt auf S^2 sieht lokal (d.h. in einer kleinen Umgebung) aus wie ein Teil der euklidischen Ebene. Großkreise sehen aus wie Teile von Geraden und Geodäten sehen aus wie Teile von Strecken.

Also kann man die Größe eines Winkels auf S^2 genauso bestimmen wie die Größe eines Winkels in E.

WARNUNG: Die Summe der Innenwinkel von Dreiecken auf S^2 variiert!

Beispiel:



Sehr kleine Dreiecke auf S^2 haben Innenwinkelsumme $\approx \pi$.

Satz: (9.6)

Der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks auf S^2 ist gleich

$$(\text{Innenwinkelsumme}) - \pi.$$

↳ Beweis: siehe Skript (nicht klausurrelevant.) $\blacksquare$

ENDE DER
VORLESUNG

§ Wiederholung: Bewegungen

Definition:

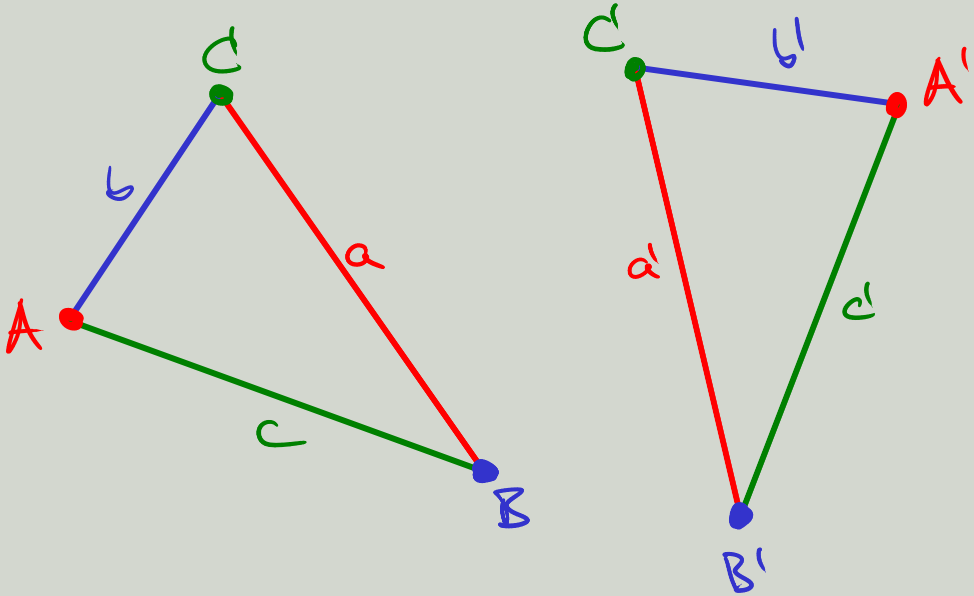
Bewegung = längenerhaltende Abbildung $E \to E$

Satz:

Jede Bewegung lässt sich schreiben als Verknüpfung von:

* Verschiebung
* Drehung
* Spiegelungen.

Lieblingssatz zu Bewegungen:



Sind $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$ derart, dass

$$a = a', \quad b = b' \text{ und } \quad c = c',$$

und A, B, C nicht kolinear sind,

so gibt es genau eine Bewegung

$$\varphi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$$

derart, dass

$$\varphi(A) = A', \ \varphi(B) = B' \text{ und } \varphi(C) = C'.$$

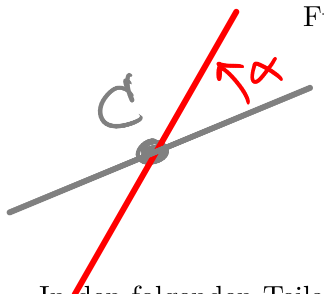
Probeklausur

2 | Sportlich **[1+1+2+2+2+2 Punkte]**

(a) Definiere die Länge der Strecke $\overline{AB}$ zwischen zwei Punkten A und B in der euklidischen Ebene.

$$l(\overline{AB}) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \quad \text{wobei } A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(b) Sei φ eine Drehung um einen Punkt C und einen Winkel α. Vervollständige den folgenden Satz zu einer wahren, nicht-tautologischen Aussage: (Du brauchst Deine Antwort nicht zu begründen.)



Für alle Punkte $P \in \mathbb{E}$ gilt: $\varphi(P) = P$ genau dann, wenn …

$P = C$ oder $\alpha = 0$.

$\alpha = 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

In den folgenden Teilaufgaben (c)–(f) werden Koordinaten von Punkten $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$ in der euklidischen Ebene angegeben. Beantworte jeweils die folgenden Frage:

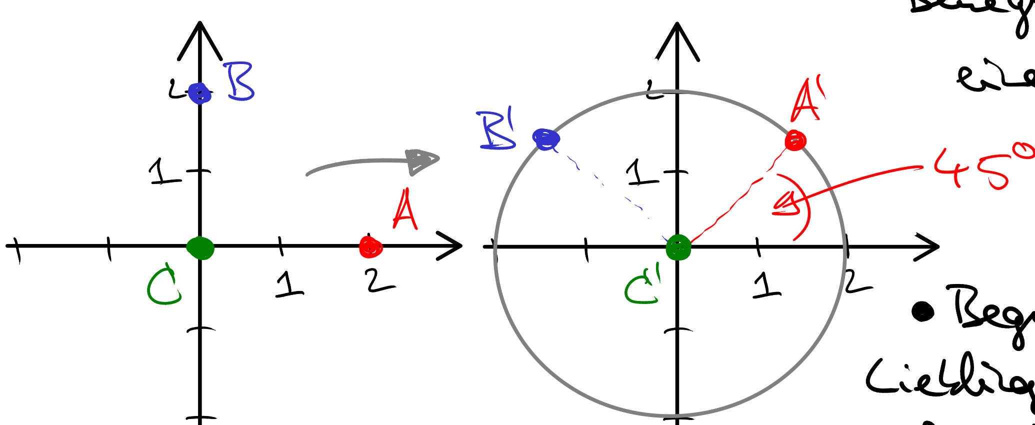
Wie viele Bewegungen $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$?

Begründe Deine Antwort. Im Fall, dass Du Bewegungen gefunden hast, beschreibe sie geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

(c) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $B = \binom{0}{2} \mapsto B' = \binom{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

$= 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{pmatrix}$

- Es gibt genau eine Bewegung, nämlich eine Drehung um 45° um den Ursprung.



- Begründung: Wende Lieblingssatz zu Bewegungen an. Das ist möglich, da A, B, C nicht kolinear sind und die Abstände erhalten bleiben.

(d) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(e) $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

$\varphi = \sigma \circ \tau$

wobei τ = Verschiebung um $\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$

und σ = Spiegelung entlang ...

(f) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto A' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\quad C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto C' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$