

Übungsblatt 1

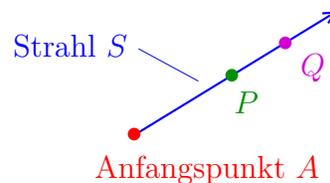
zur Vorlesung vom 19.10.2021

1 | Strahlend eindeutig

Seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl S mit Anfangspunkt A . Dann gilt:

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ}) \Leftrightarrow P = Q$$

Hinweis: Verwende die Beschreibung des Strahls als Menge der Form $\{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.

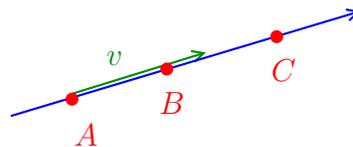


2 | Genau geodätisch

Seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei paarweise verschiedene Punkte. Dann gilt:

$$B \text{ liegt auf der Geraden } g(A, C) \text{ zwischen } A \text{ und } C. \Rightarrow \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

Hinweis: Verwende die Beschreibung der Geraden $g(A, C)$ mit Hilfe des Aufpunktes A .



3 | Clever diskriminiert

Seien $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ zwei Punkte der euklidischen Ebene. Betrachte die quadratische Funktion

$$f(x) = (a_1 - b_1x)^2 + (a_2 - b_2x)^2.$$

1. Zeige, dass $f(x) \geq 0$.
2. Schreibe $f(x)$ in der Form $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
3. Durch Betrachtung der Diskriminante von $f(x)$, zeige dass

$$(a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Dies ist die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

4. In Abhängigkeit von A und B , wann hat $f(x)$ Nullstellen? Wann gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung?

4 | Ungleich verwurzelt

Seien $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ wie in Aufgabe 3. Nutze die dort bewiesene Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um zu zeigen:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch? Wann gilt Gleichheit?

5 | Genau geodätisch II

Gilt in der Aussage von Aufgabe 2 auch die umgekehrte Implikation? Wenn ja, warum? Wenn nein, was ist ein Gegenbeispiel?

6 | Pythagoreische Tripel

Drei positive ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nennt man ein pythagoreisches Tripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Beispielsweise ist $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ ein solches Tripel. Gibt es andere Beispiele? Gibt es vielleicht unendlich viele verschiedene pythagoreische Tripel? (Und wie werden daraus interessante Fragen?)

Hinweis: Nutze binomische Formeln!