Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 10

zur Vorlesung vom 21.12.2021

---

1 | Kongruenzsätze für Vierecke

(a) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSSS? D.h. wenn für gegebene Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ alle entsprechenden Seiten gleich lang sind und ein Innenwinkel gleich groß ist, folgt daraus schon, dass die Vierecke kongruent sind?

(b) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSWS?

(c) Welche anderen Kongruenzsätze kennt ihr für Vierecke? Könnt ihr selber welche finden?

2 | Quadratisch konstruiert

Ein einfaches Vieleck heißt regulär, wenn alle Kanten und alle Innenwinkel gleich groß sind.

(a) Wie konstruiert man ein reguläres Viereck (d.h. ein Quadrat) mit Zirkel und Lineal?

(b) Warum liefert die Konstruktion in der Tat ein reguläres Viereck?

(c) Was ist die minimale Zahl von Kreisen, die man für diese Konstruktion benötigt?

3 | Ein Satz von Gauß

Eine *Fermatsche Primzahl* ist definiert als eine Primzahl, welche man in der Form $2^{2^m}+1$ schreiben kann. Beispielsweise sind

$$2^{2^0}+1=2^1+1=3,\qquad 2^{2^1}+1=2^2+1=5,\qquad 2^{2^2}+1=2^4+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=2^8+1=257\quad\text{und}\quad 2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$$

Fermatsche Primzahlen. (Es wird vermutet, dass dies auch die einzigen sind.) Gauß zeigte folgende Aussage:

> *Für $n\in\mathbb{N}$ ist ein reguläres n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n=2^m\cdot p_1\cdots p_k$ ist, wobei $p_1,\dots,p_k$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind und $m\in\mathbb{N}_0$.*

Für welche $n\in\{3,\dots,20\}$ kann man nun also ein reguläres n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

4 | Zauberlehrling

Punkte der Ebene, deren beide Koordinaten ganzzahlig sind, nennt man *Gitterpunkte*. Der **Satz von Pick** besagt nun folgendes: Angenommen, alle Eckpunkte eines einfachen Vielecks V in der Ebene sind solche Gitterpunkte. Dann gilt:

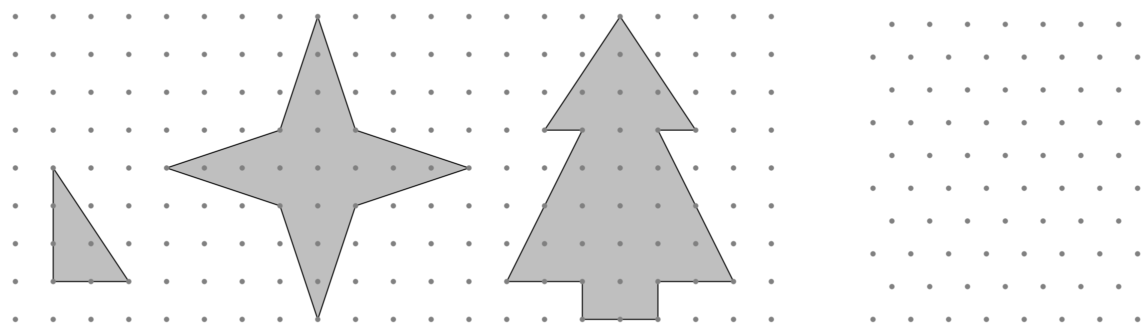
$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt von } V = &\Big(\text{Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von } V\Big)\\ &+ \tfrac{1}{2}\Big(\text{Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von } V\Big) - 1\end{aligned}$$

Ein grandioser Beweis wird hier in sechs Minuten exzellent erklärt:

`https://www.youtube.com/watch?v=uh-yRNqLpOg`

(Das Video ist auf englisch, aber die Youtube-Auto-Übersetzung wird immer besser.)

Alles was man dazu braucht ist der Innenwinkelsatz für einfache Vielecke aus der Vorlesung (und eine Menge Wasser). Überprüfe die Korrektheit der Formel für die drei folgenden Polygone:



Gibt es eine ähnliche Formel, wenn man das bisherige Gitter (links) durch das Gitter rechts ersetzt?

5 | Eureka, Euclidea!

Spiele das δ-Level von Euclidea durch:

`https://www.euclidea.xyz/en/game/packs/Delta`

(Um die erste Aufgaben freizuschalten, musst Du allerdings erst alle Aufgaben des γ-Levels gelöst haben.)

Hinweis: Wie beim letzten Mal, hier die die Übersetzung der neuen Fachworte, die man kennen muss, um das δ-Level zu lösen:

- *Circumscribed Equilateral Triangle = Umschriebenes gleichseitiges Dreieck (Korrekter wäre bei der Aufgabe für meine Griffe eher die Bezeichnung "circumscribing" = "umschreibend", aber das ist vielleicht eine Frage für die Linguistiker unter euch.)*
- *ray = Strahl*
- *adjacent midpoints = benachbarte Mittelpunkte*