Übungsblatt 3

zur Vorlesung vom 2.11.2021

1 | Gruppendynamik

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jede Bewegung umkehrbar ist, also dass es zu jeder Bewegung φ eine Abbildung ψ gibt, für die gilt

$$\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{E}} \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{E}}.$$

Wir schreiben auch φ^{-1} für ψ und nennen es das Inverse von φ . Warum *das* Inverse und nicht *ein* Inverses?

Seien nun φ und ϑ zwei Bewegungen. Sind φ und ϑ beispielsweise zwei Verschiebungen, so gilt offensichtlich $\varphi \circ \vartheta = \vartheta \circ \varphi$. Aber gilt die Identität $\varphi \circ \vartheta = \vartheta \circ \varphi$ auch allgemeiner, also wenn φ und ϑ zwei *beliebige* Bewegungen sind?

2 | Alles orthogonal oder was?

Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi_M: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, \quad v \mapsto M \cdot v, \quad \text{wobei } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

längenerhaltend ist, wenn $ab + cd = 0$ und $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$. Gilt auch die Umkehrung? In der Vorlesung wurde die Drehung um einen Winkel α definiert als Abbildung $\rho_\alpha := \varphi_{R_\alpha}$ mit

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ρ_α beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Zeige, dass ρ_α längenerhaltend ist. Finde eine Formel für eine Drehung um einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{E}$. Definiere eine Abbildung $\sigma_\alpha := \varphi_{S_\alpha}$ wobei

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass auch diese Abbildung längenerhaltend ist, und interpretiere sie geometrisch!

3 | Doppelt gemoppelt

Die Verknüpfung von zwei Verschiebungen ist wiederum eine Verschiebung, klar! Aber was ist mit der Verknüpfung von zwei Drehungen? Ist das wiederum eine Drehung? (Beachte, dass die Drehungen dabei um zwei verschiedene Punkte erfolgen können.) Was kann man über die Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang von zwei Geraden g und h sagen? Ist dies wiederum eine Spiegelung? Oder eine andere Art von längenerhaltender Abbildung?

4 | Spieglein, Spieglein, ...

Es sei g eine Gerade. Wir bezeichnen mit $s_g: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ die Spiegelung entlang von g .

1. Es sei Q ein Punkt in $\mathbb{E}$. Vervollständige den folgenden Satz:

Es gilt $s_g(Q) = Q$ genau dann, wenn ...

2. Es sei h eine Gerade, welche parallel zu g verläuft. Zeige, dass $s_g(h)$ ebenfalls parallel zu g verläuft.

5 | Akkurat ausgelotet

Es sei $g = \{P + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Richtungsvektor $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Was ist der Richtungsvektor einer Gerade, welche senkrecht auf g steht? Sei nun $P = (2, 3)$ und $v = (1, 1)$. Was ist die Spiegelung von $P = (-1, 2)$ entlang von g ?

6 | Bewegungen von Unterräumen

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen eine Abbildung $f: A \rightarrow A$ ist längenerhaltend, wenn für alle $P, Q \in A$ gilt, dass $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$.

1. Ist jede längenerhaltende Abbildung injektiv?
2. Ist jede längenerhaltende Abbildung surjektiv?
3. Gibt es eine längenerhaltende Abbildung $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sodass $F(a) = f(a)$ für alle $a \in A$? Wenn ja, ist $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eindeutig? Wenn nein, findest Du ein Gegenbeispiel?