Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 4

zur Vorlesung vom 9.11.2021

---

1 | Zunehmend verwinkelt

Wir haben in der Vorlesung gelernt, dass jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend ist. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

2 | Auf den Punkt gebracht

Gebe eine geometrische Definition der Spiegelung in einem Punkt $P \in \mathbb{E}$. Zeige, dass die Spiegelung im Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ längenerhaltend ist. Wir kennen nun folgende Beispiele von längenerhaltende Abbildung:

- Verschiebung
- Spiegelung entlang einer Gerade
- Drehung um einen Punkt

Wie passen da die Punktspiegelung rein? Genauer gesagt, kann man Punktspiegelungen durch Spiegelungen oder Drehungen beschreiben?

3 | Geometrische Charakterisierung von Drehungen

In der Vorlesung haben wir Spiegelungen entlang von Geraden geometrisch charakterisiert. Zeige nun analog die folgende Charakterisierung von Drehungen um einen Punkt:

Seien s, t zwei Strahlen mit dem gleichen Startpunkt P derart, dass $0 < \sphericalangle(s, t) < \pi$. Dann gibt es genau eine Bewegung $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(s) = t \quad \text{(also insbesondere } \varphi(P) = P\text{), und} \quad \varphi(t) \neq s.$$

Wir nennen $\rho_{s,t} := \varphi$ die Drehung um P und den Winkel $\sphericalangle(s, t)$. Ist die Annahme $0 < \sphericalangle(s, t) < \pi$ notwendig? Welcher Sinn steckt hinter der Forderung $\varphi(t) \neq s$?

4 | Spielereien am Badschrank I

Es sei $P \in \mathbb{E}$ ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche senkrecht aufeinander stehen. Was ist die geometrische Beschreibung der Verknüpfung der beiden Spiegelungen s_g und s_h?

5 | Spielereien am Badschrank II

Es sei P ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche den Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ einschlagen. Die Spiegelung entlang von g, gefolgt von der Spiegelung um h ist eine Drehung um P. Was ist der Drehwinkel dieser Drehung?

Hinweis: Es gibt sowohl einen geometrischen Ansatz als auch einen rein algebraischen. Der algebraische Ansatz ist etwas schwieriger, weil man sich dazu an die richtigen trigonometrischen Identitäten erinnern muss. Probiere daher zunächst den geometrischen Ansatz. Für den algebraischen Ansatz kannst Du ohne Einschränkung $P = 0$ annehmen. (Warum?) Nutze Übungsblatt 3, Aufgabe 2.

6 | Spielereien am Badschrank III

Sei σ eine Spiegelung an einer Geraden g und ρ eine Drehung um einen Punkt P um einen Winkel α. Vervollständige den folgenden Satz:

Die Verknüpfung $\sigma \circ \rho$ ist eine Spiegelung genau dann, wenn ...