Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 5

zur Vorlesung vom 16.11.2021

---

1 | Raten streng erlaubt!

Entscheide, wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es gibt derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ für die folgenden Wahlen von $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$:

(a) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad B = \binom{0}{2} \mapsto B' = \binom{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

(b) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad B = \binom{-2}{0} \mapsto B' = \binom{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

(c) $A = \binom{-2}{1} \mapsto A' = \binom{3}{1}$, $\quad B = \binom{-1}{3} \mapsto B' = \binom{4}{3}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{1}{2}$

(d) $A = \binom{0}{2} \mapsto A' = \binom{\sqrt{3}}{1}$, $\quad B = \binom{2}{0} \mapsto B' = \binom{-1}{-\sqrt{3}}$, $\quad C = \binom{0}{3} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

Begründe Deine Antwort und beschreibe die gefundenen Bewegungen geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

2 | Error 417: Expectation Failed

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass jede Bewegung $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ sich schreiben lässt als

$$\varphi = \tau_P \circ \rho_\alpha \quad \text{oder} \quad \varphi = \tau_P \circ \rho_\alpha \circ \sigma,$$

wobei τ_P eine Verschiebung um einen Punkt P, ρ_α eine Drehung um den Ursprung und einen Winkel α, sowie σ die Spiegelung entlang der x-Achse ist.
Insbesondere sollte diese Aussage ja gelten, wenn φ die einfachste aller Bewegungen, die Identität, ist. Aber ist das wirklich der Fall?

3 | Konzentrisch

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $A, B \in \mathbb{E}$ definiert durch

$$A = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad B = \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(\binom{1}{0}) = A$, $\varphi(\binom{0}{1}) = B$? Beschreibe die möglichen Bilder $\varphi(0)$ dieser Abbildungen.
Hinweis: Schaue Dir erst ein, zwei Fälle an, bei denen Du für α eine konkrete Zahl einsetzt, für die Du A und B einfach ausrechnen kannst.

4 | Ordnung ist wichtig!

Es sei h eine Gerade und P ein Punkt auf h. Zudem sei $\varphi := \rho_{P,\alpha}$ eine Drehung um P mit Drehwinkel α.

1. Zeige, dass es eine Gerade k durch P gibt derart, dass $\rho_{P,\alpha} = \sigma_h \circ \sigma_k$.
2. Zeige, dass es eine Gerade g durch P gibt derart, dass $\rho_{P,\alpha} = \sigma_g \circ \sigma_h$.

Hinweis: Verwende die geometrische Charakterisierung von Spiegelungen. Wie äußert sich, ob φ im Uhrzeigensinn oder gegen den Uhrzeigersinn dreht?

5 | Doppelt doppelt gemoppelt

Es sei $\varphi := \rho_{P,\alpha}$ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel α um einen Punkt P und es sei $\psi := \rho_{Q,\beta}$ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel β um einen Punkt Q mit $P \neq Q$. Vervollständige die folgende Aussage:

Die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ist wiederum eine Drehung, außer ...

Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Wende Aufgabe 4 mit $h = g(P, Q)$ an.

6 | Total verspiegelt

1. Es seien g und h zwei Geraden, welche sich nicht schneiden. Was kannst Du über die Verknüpfung der Spiegelungen entlang von g und h sagen? Was passiert geometrisch?
2. Begründe, warum jede Bewegung eine Verknüpfung von mehreren Spiegelungen entlang Geraden ist.
3. Es seien a, b, c drei *parallele* Geraden. Was kannst Du über die Verknüpfung $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ sagen? Was passiert geometrisch?
4. Es seien a, b, c, d insgesamt vier Geraden. Zeige, dass die Verknüpfung $\sigma_d \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ als Verknüpfung von zwei Spiegelungen geschrieben werden kann.
   Unterscheide folgende Fälle:
   (i) a und b sind nicht parallel und c und d sind nicht parallel.
   (ii) a und b sind nicht parallel aber c und d sind parallel.
   (iii) a und b sind parallel jedoch und c und d sind nicht parallel.
   (iv) a und b sind parallel und c und d sind ebenfalls parallel.

   Hinweis: Wende Aufgabe 4 geschickt an.
5. Zeige, dass jede Bewegung als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen geschrieben werden kann.