Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 1

zur Vorlesung vom 19.10.2021

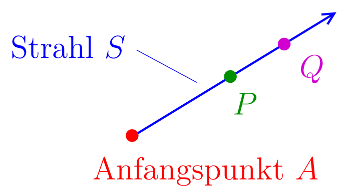
---

1 | Stahlend eindeutig

Seien P und Q zwei Punkte auf einem Strahl S mit Anfangspunkt A. Dann gilt:

$$\ell(\overline{AP}) = \ell(\overline{AQ}) \quad \Leftrightarrow \quad P = Q$$

Hinweis: Verwende die Beschreibung des Strahls als Menge der Form $\{A + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\}$.

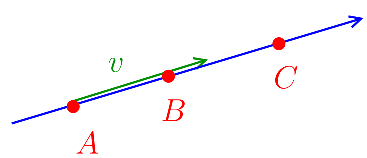


2 | Genau geodätisch

Seien $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei paarweise verschiedene Punkte. Dann gilt:

$$B \text{ liegt auf der Geraden } g(A,C) \text{ zwischen } A \text{ und } C. \quad \Rightarrow \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC})$$

Hinweis: Verwende die Beschreibung der Geraden $g(A,C)$ *mit Hilfe des Aufpunktes* A.



3 | Clever diskriminiert

Seien $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ zwei Punkte der euklidischen Ebene. Betrachte die quadratische Funktion

$$f(x) = (a_1 - b_1 x)^2 + (a_2 - b_2 x)^2.$$

1. Zeige, dass $f(x) \geqslant 0$.
2. Schreibe $f(x)$ in der Form $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
3. Durch Betrachtung der Diskriminante von $f(x)$, zeige dass

   $$\left(a_1^2 + a_2^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2.$$

   Dies ist die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.
4. In Abhängigkeit von A und B, wann hat $f(x)$ Nullstellen? Wann gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung?

4 | Ungleich verwurzelt

Seien $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ wie in Aufgabe 3. Nutze die dort bewiesene Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um zu zeigen:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Was bedeutet diese Ungleichung geometrisch? Wann gilt Gleichheit?

5 | Genau geodätisch II

Gilt in der Aussage von Aufgabe 2 auch die umgekehrte Implikation? Wenn ja, warum? Wenn nein, was ist ein Gegenbeispiel?

6 | Pythagoreische Tripel

Drei positive ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nennt man ein pythagoreisches Tripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Beispielsweise ist $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ ein solches Tripel. Gibt es andere Beispiele? Gibt es vielleicht unendlich viele verschiedene pythagoreische Tripel? (Und wie werden daraus interessante Fragen?)

Hinweis: Nutze binomische Formeln!

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 2

zur Vorlesung vom 26.10.2021

---

1 | Das Parallelenaxiom

Zur Erinnerung: Wir sagen zwei Geraden g und h sind *parallel*, wenn sich diese nicht schneiden *oder*, wenn die beiden Geraden identisch sind. Wir schreiben dann $g \parallel h$. Beweise nun, etwa mit Hilfe linearer Algebra: Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P, welche parallel zu g verläuft.

Hinweis: Benutze die in der Vorlesung gezeigte Aussage $g \nparallel h \Leftrightarrow g \cap h = \{1 \textit{ Punkt}\}$. Wie lässt sich die rechte Seite umformulieren?

2 | Parallelität ist transitiv!

Es seien g, h, k drei Geraden. Wenn $g \parallel h$ und $h \parallel k$, dann gilt auch $g \parallel k$.

Hinweis: Versuche die Aufgabe geschickt auf Aufgabe 1 zurückzuführen.

3 | Ist Nicht-Parallelität nicht transitiv?

Es seien a, b, c paarweise verschiedene Geraden mit $a \parallel b$. Wenn c die Gerade a schneidet, schneidet c dann auch die Gerade b? Was ist, wenn a, b und c nicht paarweise verschieden sind?

4 | Ehrlich halbiert

Zu jeder Geraden g in $\mathbb{R}^2$ gibt es zwei Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^2 \setminus g$, die durch die folgenden vier Eigenschaften definiert sind:

1. $\mathbb{R}^2 = U \cup V \cup g$;
2. $U \cap V = \varnothing$;
3. Alle Punkte in U liegen auf der gleiche Seite von g; und
4. Alle Punkte in V liegen auf der gleiche Seite von g.

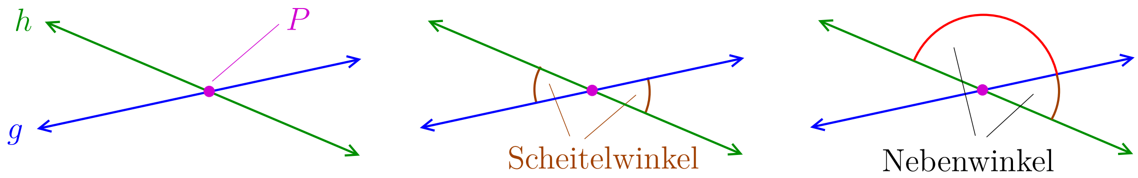
(Wir bezeichnen U und V als die durch g definierten *Halbebenen*.)

Hinweis: Nehme an, dass $g = \{Q + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wie könnte man U und V mit etwas linearer Algebra beschreiben?

5 | Irgendwie geviertelt

Es seien g und h zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Zeige, dass die Scheitelwinkel gleich groß sind.

Hinweis: Benutze den Nebenwinkelsatz.



6 | Gut verknüpft

Es seien $\varphi, \psi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ zwei längenerhaltende Abbildungen. Ist dann auch die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E} \\ P &\mapsto \varphi(\psi(P)) \end{aligned}$$

längenerhaltend?

Übungsblatt 3

zur Vorlesung vom 2.11.2021

---

1 | Gruppendynamik

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass jede Bewegung umkehrbar ist, also dass es zu jeder Bewegung φ eine Abbildung ψ gibt, für die gilt

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} \quad \text{und} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}\,.$$

Wir schreiben auch φ^{-1} für ψ und nennen es das Inverse von φ. Warum *das* Inverse und nicht *ein* Inverses?
Seien nun φ und ϑ zwei Bewegungen. Sind φ und ϑ beispielsweise zwei Verschiebungen, so gilt offensichtlich $\varphi \circ \vartheta = \vartheta \circ \varphi$. Aber gilt die Identität $\varphi \circ \vartheta = \vartheta \circ \varphi$ auch allgemeiner, also wenn φ und ϑ zwei *beliebige* Bewegungen sind?

2 | Alles orthogonal oder was?

Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi_M\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \quad v \mapsto M \cdot v, \quad \text{wobei } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

längenerhaltend ist, wenn $ab + cd = 0$ und $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$. Gilt auch die Umkehrung?
In der Vorlesung wurde die Drehung um einen Winkel α definiert als Abbildung $\rho_\alpha \coloneqq \varphi_{R_\alpha}$ mit

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ρ_α beschreibt eine Drehung um den Ursprung. Zeige, dass ρ_α längenerhaltend ist. Finde eine Formel für eine Drehung um einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{E}$. Definiere eine Abbildung $\sigma_\alpha \coloneqq \varphi_{S_\alpha}$ wobei

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass auch diese Abbildung längenerhaltend ist, und interpretiere sie geometrisch!

3 | Doppelt gemoppelt

Die Verknüpfung von zwei Verschiebungen ist wiederum eine Verschiebung, klar! Aber was ist mit der Verknüpfung von zwei Drehungen? Ist das wiederum eine Drehung? (Beachte, dass die Drehungen dabei um zwei verschiedene Punkte erfolgen können.) Was kann man über die Verknüpfung von zwei Spiegelungen entlang von zwei Geraden g und h sagen? Ist dies wiederum eine Spiegelung? Oder eine andere Art von längenerhaltender Abbildung?

4 | Spieglein, Spieglein, ...

Es sei g eine Gerade. Wir bezeichnen mit $\sigma_g\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Spiegelung entlang von g.

1. Es sei Q ein Punkt in $\mathbb{E}$. Vervollständige den folgenden Satz:

   $$\text{Es gilt } \sigma_g(Q) = Q \text{ genau dann, wenn } \ldots$$

2. Es sei h eine Gerade, welche parallel zu g verläuft. Zeige, dass $\sigma_g(h)$ ebenfalls parallel zu g verläuft.

5 | Akkurat ausgelotet

Es sei $g = \{P + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade mit Richtungsvektor $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Was ist der Richtungsvektor einer Gerade, welche senkrecht auf g steht? Sei nun $P = (2, 3)$ und $v = (1, 1)$. Was ist die Spiegelung von $P = (-1, 2)$ entlang von g?

6 | Bewegungen von Unterräumen

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Wir sagen eine Abbildung $f\colon\ A \to A$ ist längenerhaltend, wenn für alle $P, Q \in A$ gilt, dass $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$.

1. Ist jede längenerhaltende Abbildung injektiv?

2. Ist jede längenerhaltende Abbildung surjektiv?

3. Gibt es eine längenerhaltende Abbildung $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sodass $F(a) = f(a)$ für alle $a \in A$? Wenn ja, ist $F\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eindeutig? Wenn nein, findest Du ein Gegenbeispiel?

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 4

zur Vorlesung vom 9.11.2021

---

1 | Zunehmend verwinkelt

Wir haben in der Vorlesung gelernt, dass jede längenerhaltende Abbildung auch winkelerhaltend ist. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

2 | Auf den Punkt gebracht

Gebe eine geometrische Definition der Spiegelung in einem Punkt $P \in \mathbb{E}$. Zeige, dass die Spiegelung im Ursprung $(0,0) \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ längenerhaltend ist. Wir kennen nun folgende Beispiele von längenerhaltende Abbildung:

- Verschiebung
- Spiegelung entlang einer Gerade
- Drehung um einen Punkt

Wie passen da die Punktspiegelung rein? Genauer gesagt, kann man Punktspiegelungen durch Spiegelungen oder Drehungen beschreiben?

3 | Geometrische Charakterisierung von Drehungen

In der Vorlesung haben wir Spiegelungen entlang von Geraden geometrisch charakterisiert. Zeige nun analog die folgende Charakterisierung von Drehungen um einen Punkt:

Seien s, t zwei Strahlen mit dem gleichen Startpunkt P derart, dass $0 < \sphericalangle(s,t) < \pi$. Dann gibt es genau eine Bewegung $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(s) = t \quad \text{(also insbesondere } \varphi(P) = P\text{), und} \quad \varphi(t) \neq s.$$

Wir nennen $\rho_{s,t} \coloneqq \varphi$ die Drehung um P und den Winkel $\sphericalangle(s,t)$. Ist die Annahme $0 < \sphericalangle(s,t) < \pi$ notwendig? Welcher Sinn steckt hinter der Forderung $\varphi(t) \neq s$?

4 | Spielereien am Badschrank I

Es sei $P \in \mathbb{E}$ ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche senkrecht aufeinander stehen. Was ist die geometrische Beschreibung der Verknüpfung der beiden Spiegelungen σ_g und σ_h?

5 | Spielereien am Badschrank II

Es sei P ein Punkt und es seien g und h zwei Geraden durch P, welche den Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ einschlagen. Die Spiegelung entlang von g, gefolgt von der Spiegelung um h ist eine Drehung um P. Was ist der Drehwinkel dieser Drehung?

Hinweis: Es gibt sowohl einen geometrischen Ansatz als auch einen rein algebraischen. Der algebraische Ansatz ist etwas schwieriger, weil man sich dazu an die richtigen trigonometrischen Identitäten erinnern muss. Probiere daher zunächst den geometrischen Ansatz. Für den algebraischen Ansatz kannst Du ohne Einschränkung $P = 0$ annehmen. (Warum?) Nutze Übungsblatt 3, Aufgabe 2.

6 | Spielereien am Badschrank III

Sei σ eine Spiegelung an einer Geraden g und ρ eine Drehung um einen Punkt P um einen Winkel α. Vervollständige den folgenden Satz:

Die Verknüpfung $\sigma \circ \rho$ ist eine Spiegelung genau dann, wenn ...

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 5

zur Vorlesung vom 16.11.2021

---

1 | Raten streng erlaubt!

Entscheide, wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es gibt derart, dass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ für die folgenden Wahlen von $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{E}$:

(a) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad B = \binom{0}{2} \mapsto B' = \binom{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

(b) $A = \binom{2}{0} \mapsto A' = \binom{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\quad B = \binom{-2}{0} \mapsto B' = \binom{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

(c) $A = \binom{-2}{1} \mapsto A' = \binom{3}{1}$, $\quad B = \binom{-1}{3} \mapsto B' = \binom{4}{3}$, $\quad C = \binom{0}{0} \mapsto C' = \binom{1}{2}$

(d) $A = \binom{0}{2} \mapsto A' = \binom{\sqrt{3}}{1}$, $\quad B = \binom{2}{0} \mapsto B' = \binom{-1}{-\sqrt{3}}$, $\quad C = \binom{0}{3} \mapsto C' = \binom{0}{0}$

Begründe Deine Antwort und beschreibe die gefundenen Bewegungen geometrisch als Drehungen, Verschiebungen, Spiegelungen oder Verknüpfung dieser elementaren Bewegungen.

2 | Error 417: Expectation Failed

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass jede Bewegung $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ sich schreiben lässt als

$$\varphi = \tau_P \circ \rho_\alpha \quad \text{oder} \quad \varphi = \tau_P \circ \rho_\alpha \circ \sigma,$$

wobei τ_P eine Verschiebung um einen Punkt P, ρ_α eine Drehung um den Ursprung und einen Winkel α, sowie σ die Spiegelung entlang der x-Achse ist.
Insbesondere sollte diese Aussage ja gelten, wenn φ die einfachste aller Bewegungen, die Identität, ist. Aber ist das wirklich der Fall?

3 | Konzentrisch

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $A, B \in \mathbb{E}$ definiert durch

$$A = \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad B = \binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Wie viele Bewegungen $\varphi\colon\ \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gibt es derart, dass $\varphi(\binom{1}{0}) = A$, $\varphi(\binom{0}{1}) = B$? Beschreibe die möglichen Bilder $\varphi(0)$ dieser Abbildungen.
Hinweis: Schaue Dir erst ein, zwei Fälle an, bei denen Du für α eine konkrete Zahl einsetzt, für die Du A und B einfach ausrechnen kannst.

4 | Ordnung ist wichtig!

Es sei h eine Gerade und P ein Punkt auf h. Zudem sei $\varphi := \rho_{P,\alpha}$ eine Drehung um P mit Drehwinkel α.

1. Zeige, dass es eine Gerade k durch P gibt derart, dass $\rho_{P,\alpha} = \sigma_h \circ \sigma_k$.
2. Zeige, dass es eine Gerade g durch P gibt derart, dass $\rho_{P,\alpha} = \sigma_g \circ \sigma_h$.

Hinweis: Verwende die geometrische Charakterisierung von Spiegelungen. Wie äußert sich, ob φ im Uhrzeigensinn oder gegen den Uhrzeigersinn dreht?

5 | Doppelt doppelt gemoppelt

Es sei $\varphi := \rho_{P,\alpha}$ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel α um einen Punkt P und es sei $\psi := \rho_{Q,\beta}$ eine Drehung mit orientiertem Drehwinkel β um einen Punkt Q mit $P \neq Q$. Vervollständige die folgende Aussage:

Die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ist wiederum eine Drehung, außer …

Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Wende Aufgabe 4 mit $h = g(P, Q)$ an.

6 | Total verspiegelt

1. Es seien g und h zwei Geraden, welche sich nicht schneiden. Was kannst Du über die Verknüpfung der Spiegelungen entlang von g und h sagen? Was passiert geometrisch?
2. Begründe, warum jede Bewegung eine Verknüpfung von mehreren Spiegelungen entlang Geraden ist.
3. Es seien a, b, c drei *parallele* Geraden. Was kannst Du über die Verknüpfung $\sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ sagen? Was passiert geometrisch?
4. Es seien a, b, c, d insgesamt vier Geraden. Zeige, dass die Verknüpfung $\sigma_d \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ als Verknüpfung von zwei Spiegelungen geschrieben werden kann.
   Unterscheide folgende Fälle:
   (i) a und b sind nicht parallel und c und d sind nicht parallel.
   (ii) a und b sind nicht parallel aber c und d sind parallel.
   (iii) a und b sind parallel jedoch und c und d sind nicht parallel.
   (iv) a und b sind parallel und c und d sind ebenfalls parallel.

   Hinweis: Wende Aufgabe 4 geschickt an.
5. Zeige, dass jede Bewegung als Verknüpfung von drei oder weniger Spiegelungen geschrieben werden kann.

Übungsblatt 6

zur Vorlesung vom 23.11.2021

---

1 | Spiegelungen entlang Tangenten und Sekanten

Sei K ein Kreis mit Zentrum P und sei Q ein Punkt auf K. Seien g eine Sekante und h eine Tangente zu K, die beide durch Q verlaufen. Seien σ_g und σ_h jeweils die Spiegelungen entlang dieser beiden Geraden.

(a) Angenommen $\sigma_g(\sigma_h(\sigma_g(P)))$ ist gleich dem Punkt P. Was kannst Du über die Sekante g sagen?

(b) Angenommen $\sigma_g(\sigma_h(\sigma_g(P)))$ liegt auf dem Kreis K. Was kannst Du dann über die Sekante g sagen?

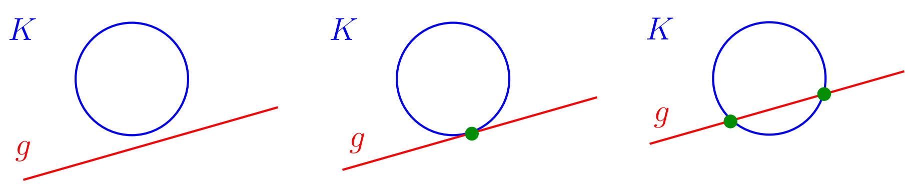
Hinweis: Konstruiere die geometrischen Objekte zunächst in Geogebra und schaue Dir an, wie der Punkt $\sigma_g(\sigma_h(\sigma_g(P)))$ von der Wahl der Sekante g abhängt. Stelle darauf eine Vermutung auf, wie die Antwort lauten sollte, und versuche sie dann zu begründen. Tipp, besonders für (b): Nutze Aufgabe 4 vom Übungsblatt 5.

2 | Frag doch mal Pythagoras!

Sei $K = K(P, r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$ um einen Punkt $P \in \mathbb{E}$ und sei $Q \in K$. Bezeichne g die Gerade durch P und Q. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die Tangente zu K durch Q nur die Gerade g' sein kann, die durch Q verläuft und senkrecht auf g steht. Zeige nun, dass g' tatsächlich eine Tangent zu K ist.

3 | Charakterstudien in einer Fußgängerzone

Sei K ein Kreis in der Ebene. In der Vorlesung hatten wir Passanten, Tangenten und Sekanten zu K definiert als Geraden, die K nicht, in genau einem bzw. in genau zwei Punkten schneiden. Zeige, dass jede Gerade entweder eine Passante, eine Tangente oder eine Sekante zu K ist.



4 | Sinnvoll durchgemessen

Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Wir bezeichnen den maximalen Abstand zwischen zwei Punkten in X als *Durchmesser von* X. Mit anderen Worten, es ist

$$\text{Durchmesser von } X \;:=\; \max\{\ell(\overline{PQ}) \mid P, Q \in X\}.$$

Zeige nun:

$$\text{Durchmesser von einem Kreis von Radius } r \;=\; 2r.$$

5 | Babyleicht: Passt das Eckige durchs Runde?

Die *Kreisscheibe mit Mittelpunkt* P *und Radius* $r \geqslant 0$ ist definiert als die Menge

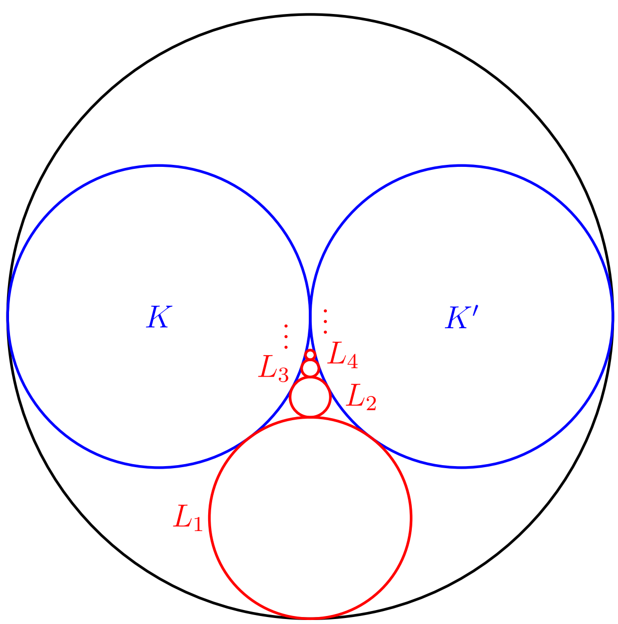
$$S(P, r) \;:=\; \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \ell(\overline{PQ}) \leqslant r\}.$$

Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit Durchmesser d. Gibt es dann notwendigerweise eine Scheibe $S(P, \frac{d}{2})$ von Radius $\frac{d}{2}$, welche X enthält?

6 | Biene im Teleskop

Seien K und K' zwei Kreise mit jeweils Radius $1/2$ derart, dass K, K' und der Einheitskreis sich jeweils nur in einem Punkt berühren; siehe Skizze. Sei nun L_1 ein vierter Kreis, der K, K' und den Einheitskreis jeweils in genau einem Punkt berühren.

- Was ist der Radius von L_1?
- Was ist der Radius des Kreises L_2, der L_1 sowie K und K' berührt?
- Allgemeiner für $n > 1$, was ist der Radius des Kreises L_n, der L_{n-1} sowie K und K' berührt?



Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

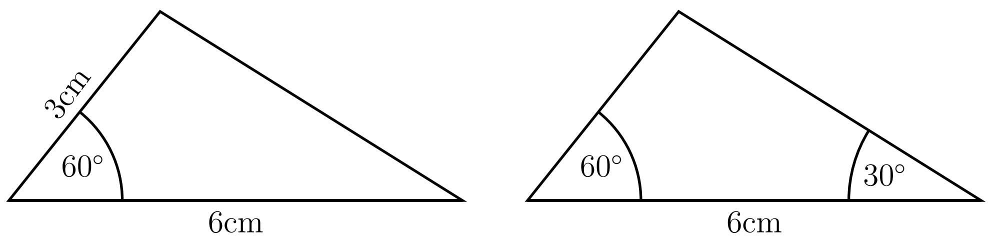
Übungsblatt 7

zur Vorlesung vom 30.11.2021

---

1 | Recht winklig!

Entscheide, ob die folgenden Dreiecke zueinander kongruent sind bzw. sein können:



Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Die obigen Zeichnungen sind nicht maßstabsgerecht.

2 | Auf Distanz

Seien $K = K(P, r)$ und $K' = K(P', r')$ zwei Kreise in der Ebene mit Zentren P und P' sowie Radien $r > 0$ und $r' > 0$. Sei $\ell = \ell(\overline{PP'})$. Zeige:

1. Gilt $\ell > r + r'$, so schneiden sich K' und K nicht.
2. Gilt $r > r' + \ell$, so schneiden sich K' und K nicht.
3. Gilt $r' > r + \ell$, so schneiden sich K' und K nicht.

Was unterscheidet die drei Fälle geometrisch?

3 | Wie die Winkel, so die Schenkel

Es sei ΔABC ein Dreieck. Zeige die folgende Aussage:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC \quad \Rightarrow \quad \ell(\overline{AC}) = \ell(\overline{BC}).$$

Hinweis: In der Vorlesung hatten wir die "$\Leftarrow$"-Richtung bewiesen.

4 | Symbol der Macht

Eine Raute ist per Definition ein Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang sind. Zeige: Die Diagonalen einer Raute halbieren sich gegenseitig und halbieren die Innenwinkel der Raute.

5 | Eureka, Euclidea!

Spiele das α-Level von Euclidea durch:

`https://www.euclidea.xyz/en/game/packs/Alpha`

Wer die meisten Punkte bekommt, gewinnt!

Hinweis: Das Spiel gibt es bisher leider nur auf englisch oder russisch. Aber die meisten Begriffe lassen sich einfach ergooglen. Hier die wichtigsten für das α-Level:

- *equilateral triangle = gleichseitiges Dreieck*
- *perpendicular bisector = Mittelsenkrechte*
- *rhombus = Raute (siehe Aufgabe 4)*
- *inscribed square = einbeschriebenes Quadrat = Quadrat, das ein anderes geometrisches Object (hier: ein Kreis) von innen an allen vier Eckpunkten berührt.*

Übungsblatt 8

zur Vorlesung vom 7.12.2021

---

1 | Äquidistant

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene $\mathbb{E}$. Zeige:

$$\{Q \in \mathbb{E} \mid \ell(\overline{AQ}) = \ell(\overline{BQ})\} = \text{Mittelsenkrechte zu } \overline{AB}.$$

Hinweis: Zeige zunächst die Inklusion $\subseteq$ und dann die Inklusion $\supseteq$.

2 | Spiegel im Zirkus

Es seien S und T zwei Strecken, die sich nicht schneiden und die gleiche (von 0 verschiedene) Länge haben. Wir nehmen an, dass S und T nicht auf einer Gerade liegen. Unter welchen geometrischen Voraussetzungen an S und T gibt es eine Spiegelung entlang einer Geraden g, die S auf T abbildet?

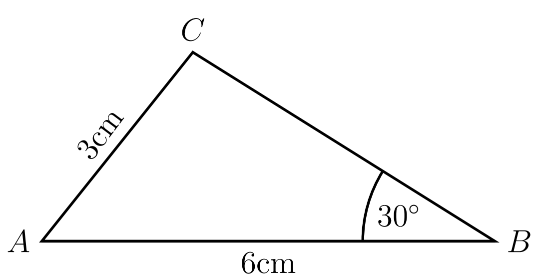
3 | Minimalistisch

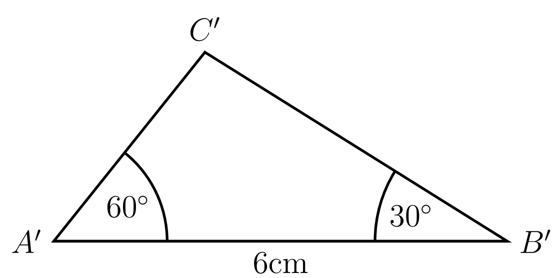
Es sei g eine Gerade und P ein Punkt, welcher nicht auf g liegt. Es sei h die eindeutig bestimmte Gerade durch P, welche parallel zu g verläuft. Wir wollen die Gerade mit Zirkel und Lineal mit möglichst wenig Aufwand konstruieren. Was ist die minimale Zahl von Kreisen, die wir verwenden müssen um h zu konstruieren?

Hinweis: Rauten haben parallele Seiten. Für diese Aufgabe kann sicherlich auch wieder Geogebra hilfreich sein.

4 | Recht winklig II

Entscheide, ob die folgenden Dreiecke zueinander kongruent sind bzw. sein können:





Begründe Deine Antwort.

Hinweis: Die obigen Zeichnungen sind nicht maßstabsgerecht.

5 | Eureka, Euclidea!

Spiele das β-Level von Euclidea durch:

`https://www.euclidea.xyz/en/game/packs/Beta`

(Um die erste Aufgaben freizuschalten, musst Du allerdings erst alle Aufgaben des α-Levels gelöst haben.)

Hinweis: Wie beim letzten Mal, hier die die Übersetzung der neuen Fachworte, die man kennen muss, um das β-Level zu lösen:

- *intersection of angle bisectors = Schnittpunkt von Winkelhalbierenden*
- *drop a perpendicular = das Lot fällen*

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

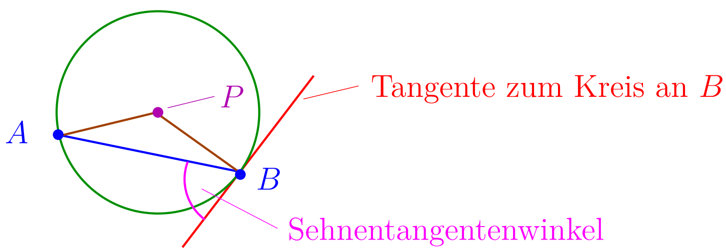
Übungsblatt 9

zur Vorlesung vom 14.12.2021

---

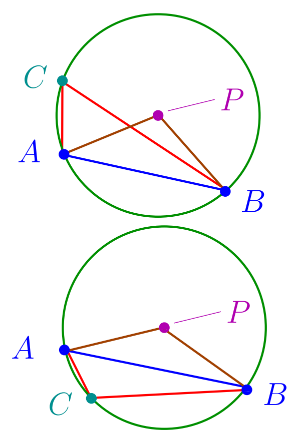
1 | Treffen sich Sehnen und Tangenten an einem Kreis...

Betrachte folgende Abbildung:



Was ist der Zusammenhang zwischen $\sphericalangle_{APB}$ und dem Sehnentangentenwinkel bei B? Begründe Deine Antwort.

2 | Randständig



Vervollständige den Beweis des Peripheriewinkelsatzes aus der Vorlesung, indem Du zeigst, dass auch in dem Fall, dass der Mittelpunkt P des Kreises nicht im Innern des Dreiecks liegt, gilt:

$$\sphericalangle_{ACB} = \frac{1}{2}\sphericalangle_{APB}.$$

Was passiert, wenn man die Annahme aus dem Peripheriewinkelsatz, dass die Punkte C und P auf der gleichen Seite der Geraden $g(A, B)$ liegen, umdreht? Mit anderen Worten, gibt es einen Zusammenhang zwischen $\sphericalangle_{ACB}$ und $\sphericalangle_{APB}$, wenn C und P auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen? Begründe Deine Antwort.

3 | Vierertanz

Es seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis. Was kannst Du über die Summe von sich gegenüberliegenden Innenwinkeln sagen? Begründe wie immer Deine Antwort.

4 | Tangentenfällung

Seien $K(P, r)$ ein Kreis mit $r > 0$ und Q ein Punkt außerhalb der zugehörigen Kreisscheibe. Konstruiere eine Tangente zum Kreis $K(P, r)$ durch den Punkt Q mit Zirkel und Lineal. Wo hast Du in der Konstruktion verwendet, dass der Punkt Q außerhalb der Kreisscheibe liegt?

Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Gerade g eine Tangente zum Kreis $K(P, r)$ im Punkt C ist, genau dann, wenn g senkrecht auf $\overline{PC}$ steht.

5 | Eureka, Euclidea!

Spiele das γ-Level von Euclidea durch:

`https://www.euclidea.xyz/en/game/packs/Gamma`

(Um die erste Aufgaben freizuschalten, musst Du allerdings erst alle Aufgaben des β-Levels gelöst haben.)

Hinweis: Wie beim letzten Mal, hier die die Übersetzung der neuen Fachworte, die man kennen muss, um das γ-Level zu lösen:

- *chord midpoint = Mittelpunkt einer Kreissehne*
- *orthocenter = Höhenschnittpunkt*
- *trapezoid bases = Basen eines Trapezoiden = parallelen Seiten eines Vierecks mit zwei parallelen Seiten*
- *lozenge = Lutschfruchtbonbon (Raute)*
- *quadrilateral = Viereck*

Universität Regensburg **Elementargeometrie (LR)**
Claudius Zibrowius WS 2021/22

Übungsblatt 10

zur Vorlesung vom 21.12.2021

---

1 | Kongruenzsätze für Vierecke

(a) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSSS? D.h. wenn für gegebene Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ alle entsprechenden Seiten gleich lang sind und ein Innenwinkel gleich groß ist, folgt daraus schon, dass die Vierecke kongruent sind?

(b) Gilt für Vierecke ein Kongruenzsatz der Form SWSWS?

(c) Welche anderen Kongruenzsätze kennt ihr für Vierecke? Könnt ihr selber welche finden?

2 | Quadratisch konstruiert

Ein einfaches Vieleck heißt regulär, wenn alle Kanten und alle Innenwinkel gleich groß sind.

(a) Wie konstruiert man ein reguläres Viereck (d.h. ein Quadrat) mit Zirkel und Lineal?

(b) Warum liefert die Konstruktion in der Tat ein reguläres Viereck?

(c) Was ist die minimale Zahl von Kreisen, die man für diese Konstruktion benötigt?

3 | Ein Satz von Gauß

Eine *Fermatsche Primzahl* ist definiert als eine Primzahl, welche man in der Form $2^{2^m}+1$ schreiben kann. Beispielsweise sind

$$2^{2^0}+1=2^1+1=3,\qquad 2^{2^1}+1=2^2+1=5,\qquad 2^{2^2}+1=2^4+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=2^8+1=257\quad\text{und}\quad 2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$$

Fermatsche Primzahlen. (Es wird vermutet, dass dies auch die einzigen sind.) Gauß zeigte folgende Aussage:

> *Für $n\in\mathbb{N}$ ist ein reguläres n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n=2^m\cdot p_1\cdots p_k$ ist, wobei $p_1,\dots,p_k$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind und $m\in\mathbb{N}_0$.*

Für welche $n\in\{3,\dots,20\}$ kann man nun also ein reguläres n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren?

4 | Zauberlehrling

Punkte der Ebene, deren beide Koordinaten ganzzahlig sind, nennt man *Gitterpunkte*. Der **Satz von Pick** besagt nun folgendes: Angenommen, alle Eckpunkte eines einfachen Vielecks V in der Ebene sind solche Gitterpunkte. Dann gilt:

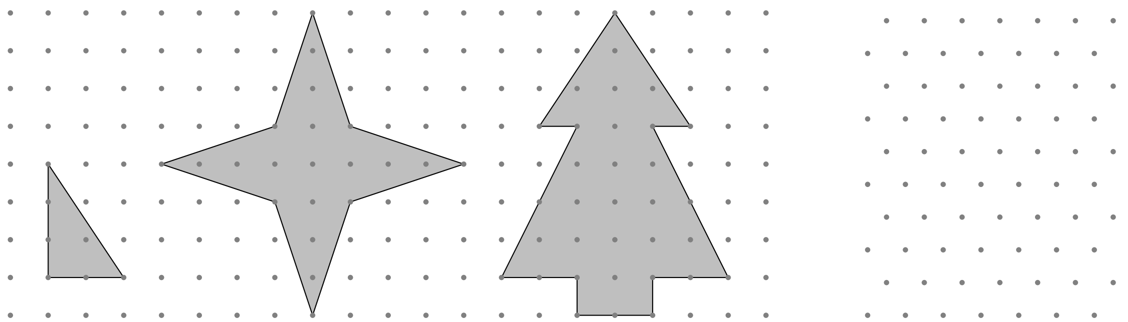
$$\begin{aligned}\text{Flächeninhalt von } V = &\Big(\text{Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von } V\Big) \\ &+ \tfrac{1}{2}\Big(\text{Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von } V\Big) - 1\end{aligned}$$

Ein grandioser Beweis wird hier in sechs Minuten exzellent erklärt:

`https://www.youtube.com/watch?v=uh-yRNqLpOg`

(Das Video ist auf englisch, aber die Youtube-Auto-Übersetzung wird immer besser.)

Alles was man dazu braucht ist der Innenwinkelsatz für einfache Vielecke aus der Vorlesung (und eine Menge Wasser). Überprüfe die Korrektheit der Formel für die drei folgenden Polygone:



Gibt es eine ähnliche Formel, wenn man das bisherige Gitter (links) durch das Gitter rechts ersetzt?

5 | Eureka, Euclidea!

Spiele das δ-Level von Euclidea durch:

`https://www.euclidea.xyz/en/game/packs/Delta`

(Um die erste Aufgaben freizuschalten, musst Du allerdings erst alle Aufgaben des γ-Levels gelöst haben.)

Hinweis: Wie beim letzten Mal, hier die die Übersetzung der neuen Fachworte, die man kennen muss, um das δ-Level zu lösen:

- *Circumscribed Equilateral Triangle = Umschriebenes gleichseitiges Dreieck (Korrekter wäre bei der Aufgabe für meine Griffe eher die Bezeichnung "circumscribing" = "umschreibend", aber das ist vielleicht eine Frage für die Linguistiker unter euch.)*
- *ray = Strahl*
- *adjacent midpoints = benachbarte Mittelpunkte*

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 11

zur Vorlesung vom 11.01.2022

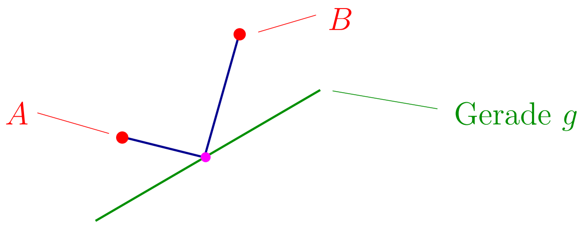
---

1 | Doch noch kongruent?

In Übungsblatt 10 hatten wir gesehen, dass es für Vierecke keinen allgemeinen Kongruenzsatz der Form SWSSS gibt. Wie schaut es aus mit sWsSS? Hier soll die Notation bedeuten, dass die mit "s" bezeichneten Seiten beide jeweils kleiner als die mit "S" bezeichneten Seiten sind. "W" bezeichnet (wie üblich) einen Innenwinkel.

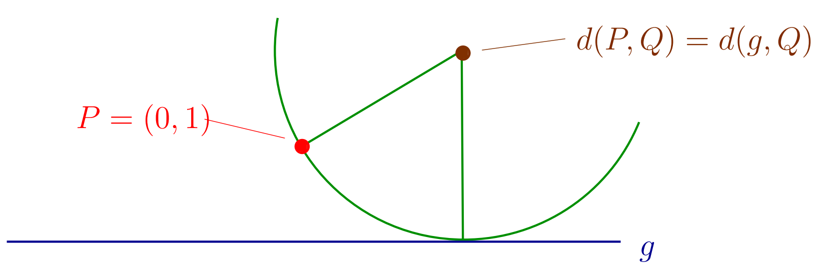
2 | Über Bande

Es seien A und B zwei Punkte, welche auf der gleichen Seite einer Geraden g liegen. Wie konstruiert man mit Zirkel und Lineal den kürzesten Weg von A nach B, welcher über die Bande geht, d.h. welcher die Gerade g berührt? Was gilt dann für die beiden Winkel an dem Berührpunkt?



3 | Satellitenschüssel

Wir wollen die Menge aller Punkte bestimmen, welche den gleichen Abstand zu einer Gerade und einem Punkt besitzen. Genauer gesagt, es sei $P = (0, 1)$ und $g = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ die x-Achse.



(a) Versuche zuerst die Menge aller Punkte Q mit $d(P, Q) = d(g, Q)$ frei zu skizzieren.

(b) Versuche nun die Menge in (a) explizit zu berechnen. D.h. bestimme alle Punkte $Q = (x, y)$ mit $d(P, Q) = d(g, Q)$.

4 | Gleichhöhig

Angenommen, zwei Höhen eines Dreiecks sind gleich lang. Was kannst Du über die Seitenlängen des Dreiecks sagen?

Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

Übungsblatt 12

zur Vorlesung vom 18.01.2022

---

1 | Abstand Punkt–Kreis

Sei K ein Kreis mit Zentrum C. Sei zudem $P \neq C$ ein weiterer Punkt der Ebene. Definiere den Punkt Q als Schnittpunkt vom Kreis mit dem Strahl $\overrightarrow{CP}$. Zeige analog zum Satz aus der Vorlesung über den Abstand Punkt–Gerade:

(1) $d(P, K) = d(P, Q)$.

(2) $d(P, Q) < d(P, R)$ für alle Punkte $R \in K$ mit $R \neq Q$.

Hinweis: Zeige, dass die Kreisscheibe mit Mittelpunkt P und Radius $d(P, Q)$ den Kreis K nur im Punkt Q schneidet. Dazu kann eine Fallunterscheidung hilfreich sein.

2 | Abstand Kreis–Kreis

Seien K und K' zwei Kreise in der Ebene um die Punkte C und C'. Wir wollen eine Strecke konstruieren, deren Länge gleich dem Abstand zwischen den beiden Kreisen ist.
Betrachte dazu zwei Punkte $A \in K$ und $A' \in K'$.

(a) Ist $\ell(\overline{AA'}) = d(K, K')$, so gilt insbesondere $\ell(\overline{AA'}) = d(A, K')$. Was folgt daraus für A'?

(b) Ist $\ell(\overline{AA'}) = d(K, K')$, so gilt insbesondere $\ell(\overline{AA'}) = d(K, A')$. Was folgt daraus für A?

Kombiniere nun (a) und (b).

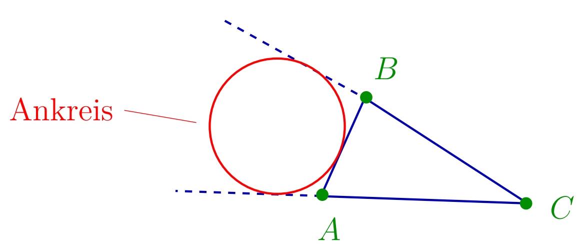
Hinweis: Nutze Aufgabe 1!

3 | Einfassend

Gibt es zu jedem konvexen Viereck einen Inkreis?

4 | Ankreis

Es sei Δ_{ABC} ein Dreieck. Der *Ankreis* zur Seite $\overline{AB}$ ist der Kreis, welcher tangential zur Seite $\overline{AB}$ und zu den Verlängerungen der anderen beiden Seiten ist. Wie kann man den Ankreis mit Zirkel und Lineal konstruieren?



Universität Regensburg
Claudius Zibrowius

Elementargeometrie (LR)
WS 2021/22

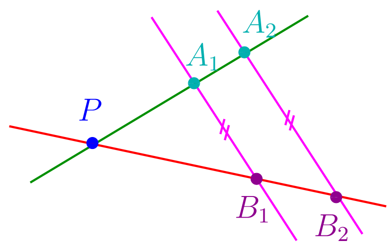
Übungsblatt 13

zur Vorlesung vom 25.01.2022

---

1 | Stahlende Verhältnisse

Es seien $g(A_1, A_2)$ und $g(B_1, B_2)$ zwei Geraden, welche sich in einem Punkt P schneiden. Wir nehmen an, dass $g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$ ist.



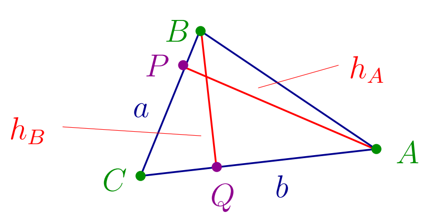
Der erste Teil des Strahlensatzes besagt, dass

$$(1)\quad \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PA_1})} = \frac{\ell(\overline{PB_2})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{A_2B_2})}{\ell(\overline{A_1B_1})} \quad \text{und} \quad (2)\quad \frac{\ell(\overline{PA_1})}{\ell(\overline{PB_1})} = \frac{\ell(\overline{PA_2})}{\ell(\overline{PB_2})} = \frac{\ell(\overline{A_1A_2})}{\ell(\overline{B_1B_2})}.$$

In der Vorlesung hatten wir schon (1) bewiesen. Leite nun die Identitäten (2) aus (1) her.

2 | Luftige Verhältnisse

Wir betrachten ein Dreieck Δ_{ABC}. Es sei h_A die Länge der Höhe bei A und es sei a die Länge der A gegenüberliegenden Seite. Ganz analog definieren wir h_B und b.



Zeige, dass

$$\frac{h_B}{h_A} = \frac{a}{b}.$$

3 | Gleichseitenhalbig

Es sei Δ ein Dreieck mit zwei gleich langen Seitenhalbierenden. Zeige, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Was ist, wenn zwei Höhen gleich groß sind?

4 | Physik des Dreiecks

Der *Schwerpunkt* einer dünnen ebenen (also zweidimensionalen) Plastikform ist der eindeutig bestimmte Punkt, welchen man mit dem Finger so unterstützen kann, dass die Form nicht vom Finger fällt. Beispielsweise ist der Schwerpunkt eines Rechtecks gerade der Schnittpunkt der Diagonalen.
Es sei nun Δ ein Plastikdreieck. Wie kann man den Schwerpunkt bestimmen?

Hinweis: Der Schwerpunkt ist einer der folgenden vier Punkte:

- *Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.*
- *Der Schnittpunkt der Höhen.*
- *Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.*
- *Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.*

Universität Regensburg **Elementargeometrie (LR)**
Claudius Zibrowius WS 2021/22

Übungsblatt 14

zur Vorlesung vom 01.02.2022

---

1 | 1D versus 2D. Wer gewinnt?

Es sei $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine Abbildung.

(a) Wenn φ längenerhaltend ist, ist dann φ auch flächeninhalterhaltend?

(b) Wenn φ flächeninhalterhaltend, ist dann φ auch längenerhaltend?

2 | Umzugsvorbereitungen

Ein quadratischer und ein kreisförmiger Tisch haben jeweils einen Flächeninhalt von 1m^2.

(a) Welcher der beiden Tische hat den größeren Umfang? Versuche die Aufgabe erst einmal ohne Rechnung zu beantworten.

(b) Berechne nun die beiden Umfänge.

Welche geometrische Form hat das beste Verhältnis von Flächeninhalt zu Umfang?

3 | Flächenformel für Dreiecke

In der Vorlesung hatten wir folgenden Satz besprochen:

> *Jedem durch endlich viele Strecken und Kreissegmente begrenzten Gebiet G in der Ebene $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ kann man auf eindeutige Weisen einen Flächeninhalt $\mathcal{A}(G)$ zuordnen, derart dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:*
>
> *(a) Es gilt $\mathcal{A}(\text{Rechteck mit Seitenlängen } a \text{ und } b) \;=\; a \cdot b$.*
>
> *(b) Bewegungen sind flächeninhalterhaltend, mit anderen Worten, kongruente Gebiete besitzen den gleichen Flächeninhalt.*
>
> *(c) Der Flächeninhalt von Strecken ist null.*
>
> *(d) Für zwei Gebiete X und Y gilt*
>
> $$\mathcal{A}(X \cup Y) \;=\; \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) - \mathcal{A}(X \cap Y).$$

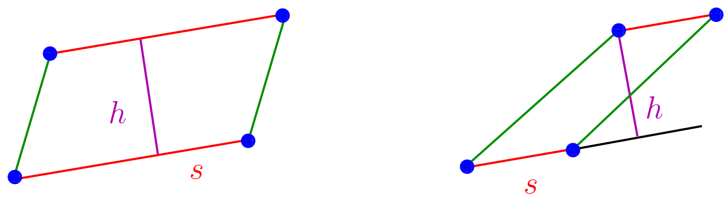
Zeige mithilfe dieses Satzes, dass für jedes Dreieck gilt

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks} = \frac{1}{2} \cdot \text{Seitenlänge} \cdot \text{Länge der zugehörigen Höhe}.$$

4 | Flächenformel für faule Parallelogramme

Es sei $\square$ ein Parallelogramm. Zeige mit möglichst wenig Aufwand, dass

$$\text{Flächeninhalt}(\square) = \text{Länge einer Seite} \cdot \text{Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden.}$$



Flächeninhalt des Parallelogramms $= s \cdot h$

Übungsblatt 15

zur Vorlesung vom 08.02.2022

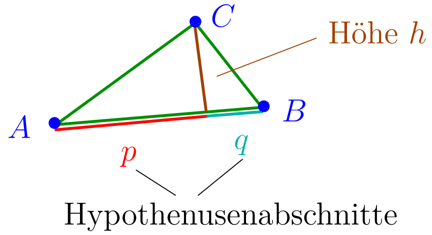
---

1 | Alter Grieche in 3D

Wir betrachten einen Quader mit Seitenlängen a, b und c. Was ist der Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten?

2 | Höhensatz

Es sei Δ_{ABC} ein rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei C. Es sei h die Höhe bei C und es seien p und q die Längen der Hypotenusenabschnitte.



Zeige, dass

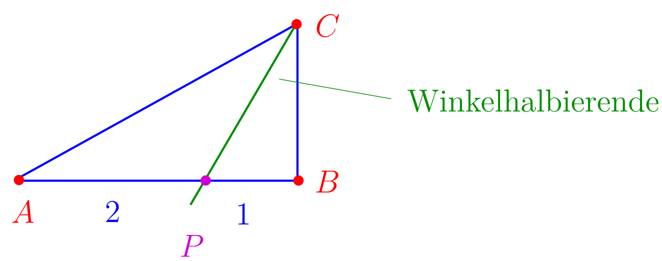
$$h^2 \;=\; p \cdot q.$$

3 | Gleichseitig verspiegelt

Es sei Δ_{ABC} ein Dreieck derart, dass $\ell(\overline{BC}) = 2 \cdot \ell(\overline{AC})$. Angenommen, Δ_{ABC} hat einen rechten Winkel bei A. Zeige, dass $\sphericalangle_{ABC} = \frac{\pi}{6}$. Gilt auch die Umkehrung?

4 | Puzzlei

Wir betrachten das folgende Dreieck Δ_{ABC} mit einem rechten Winkel bei B:



Bestimme den Flächeninhalt von Δ_{ABC}.

Hinweis: Fälle das Lot von P auf die Gerade $g(A, C)$.
